

Практикум по основам цифровой обработки сигналов

А.В. Шабунин

Данное пособие предназначено для студентов-радиофизиков, изучающих курс по цифровой обработке сигналов (ЦОС). Оно содержит четыре лабораторные работы, три из которых затрагивают фундаментальные вопросы ЦОС: дискретизацию и свойства спектров цифровых сигналов, цифровой спектральный анализ, цифровую фильтрацию, а четвертая - посвящена более частному, однако практически важному вопросу - цифровому преобразованию Гильберта. Каждая лабораторная работа включает в себя теоретическую часть, где по-возможности коротко изложены основные сведения по рассматриваемой проблеме, и практическую часть, в которой описан ход экспериментальных исследований. Для выполнения работ создан программный комплекс из четырех программ в среде программирования LabView.

Оглавление

1	Лабораторная работа: Дискретизация аналоговых сигналов	5
1.1	Краткие теоретические сведения	5
1.1.1	Введение	5
1.1.2	Типы сигналов	5
1.1.3	АЦП и ЦАП	8
1.1.4	Связь между спектрами аналогового и дискретного сигналов .	9
1.1.5	Восстановление аналогового сигнала из его равномерной вы- борки	12
1.1.6	Дискретизация полосовых сигналов.	14
1.2	Практическая часть	17
1.2.1	Экспериментальная установка	17
1.2.2	Ход работы	21
2	Лабораторная работа: Расчет спектра мощности дискретных сиг- налов	23
2.1	Краткие теоретические сведения	23
2.1.1	Введение	23
2.1.2	Дискретно-временное преобразование Фурье	24
2.1.3	Дискретное преобразование Фурье	25
2.1.4	Явление “растекания спектра”	29
2.1.5	Основное соотношение для спектров детерминированных сиг- налов	33
2.1.6	Спектр мощности случайных сигналов	34
2.2	Практическая часть	38
2.2.1	Экспериментальная установка	38
2.2.2	Ход работы	40
3	Лабораторная работа: исследование цифровых фильтров	42
3.1	Краткие теоретические сведения	42
3.1.1	Введение	42
3.1.2	Описание фильтров разностными уравнениями	42
3.1.3	Характеристики, описывающие линейные четырехполюсники .	43
3.1.4	Импульсная характеристика каузального фильтра	45
3.1.5	КИХ и БИХ фильтры	46
3.1.6	Классификация фильтров по их частотным свойствам	46
3.1.7	Понятие об идеальных фильтрах	47

3.1.8	Фильтры с линейной ФЧХ	49
3.2	Практическая часть	54
3.2.1	Экспериментальная установка	54
3.2.2	Ход работы	56
4	Лабораторная работа: Исследование цифрового фильтра Гильберта	58
4.1	Краткие теоретические сведения	58
4.1.1	Введение	58
4.1.2	Преобразование Гильберта и его свойства	58
4.1.3	Использование ПГ для выделения амплитуды и фазы сигнала	59
4.1.4	Дискретное преобразование Гильберта	61
4.1.5	Цифровой фильтр Гильберта с линейной ФЧХ	62
4.2	Практическая часть	63
4.2.1	Экспериментальная установка	64
4.2.2	Ход работы	67

1 Лабораторная работа:

Дискретизация аналоговых сигналов

1.1 Краткие теоретические сведения

1.1.1 Введение

Современная радиосвязь становится цифровой, поэтому и радиофизика, как прикладная наука, призванная разрабатывать новые методы и новые устройства связи, все больше и больше занимается цифровыми сигналами и методами их обработки. Цифровая обработка сигналов включает в себя преобразование аналоговых сигналов в цифровые, преобразование цифровых сигналов (цифровая фильтрация), а также обратное преобразование цифровых сигналов в аналоговые. В настоящей лабораторной работе рассматриваются вопросы аналогово-цифрового и цифро-аналогового преобразования и исследуются связанные с этим эффекты.

1.1.2 Типы сигналов

Выделяют следующие типы сигналов, которым соответствуют определенные формы их математического описания. **Аналоговый сигнал** $x(t)$ (рис. 1.1) является вещественнозначной функцией вещественного непрерывного аргумента (как правило, этот аргумент - время). Значения аргумента (t) являются вещественными числами, непрерывно заполняющими некоторый интервал: $t \in [t_1; t_2]$. Сам аналоговый сигнал не обязан быть непрерывным - он может иметь конечное или счетное множество

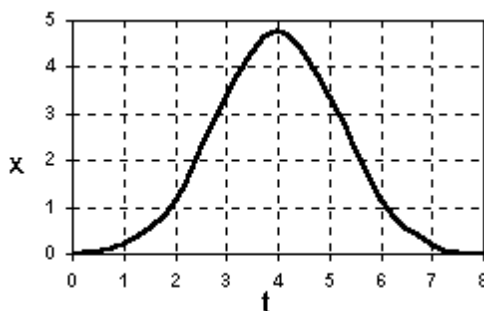


Рис. 1.1: Аналоговый сигнал

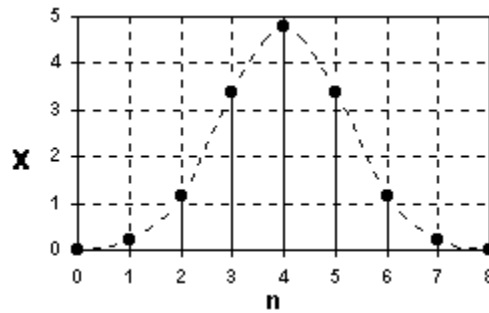


Рис. 1.2: Дискретный сигнал

точек разрыва, но он должен быть, как минимум, кусочно-непрерывным. Хорошо известный пример кусочно-непрерывного аналогового сигнала - периодическая последовательность прямоугольных импульсов (меандр). Если интервалы значений сигнала или времени, на котором он рассматривается, не ограничены, то по умолчанию они принимаются равными от $-\infty$ до $+\infty$. Пример математической записи аналогового сигнала: $x(t) = 4.8 \exp(-(t-4)^2/2.8)$. График этого сигнала приведен на рис.1.1. Источниками аналоговых сигналов, как правило, являются физические процессы и явления, непрерывно меняющиеся во времени и/или в пространстве.

Дискретный сигнал $x(n)$ является кусочно-непрерывной вещественно-значной функцией дискретного аргумента n . Иными словами, дискретный сигнал представляет собой набор (последовательность) отсчетов некоторой величины, измеренной в дискретные моменты времени. Интервал времени τ между двумя последовательными отсчетами называется *шагом дискретизации*, а обратная шагу дискретизации величина $f_d = 1/\tau$ - частотой дискретизации или частотой Найквиста (или $\omega_d = 2\pi/\tau$ - круговая частота дискретизации)¹. Дискретный сигнал можно получить из аналогового посредством процедуры *дискретизации во времени*. В этом случае дискретный сигнал $x_d(n)$ представляет собой последовательность отсчетов, значения которых в точности равны значениям исходного аналогового сигнала в моменты времени, отстоящие на шаг дискретизации:

$$x_d(n) = x(n\tau)$$

Так как отсчеты сигнала представляют собой конечный или счетный набор точек - их можно занумеровать целыми числами. Таким образом, область определения функции, задающей дискретный сигнал - множество целых чисел. Пример дискретизации аналогового сигнала, приведенного на рис.1.1, представлен на рис. 1.2.

Цифровой сигнал - сигнал $C(n)$, дискретный, как по значениям, так и по времени: $C \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$. То есть, в случае цифрового сигнала и область определения

¹В теоретических разделах, в формулах будут использоваться, как правило, круговые частоты, измеряемые в радианах а секунду, тогда как в практических разделах - традиционно все измерения проводятся с использованием "обычных" частот, измеряемых в Герцах. То же правило будет использовано и для нормированных частот, рассматриваемых далее.

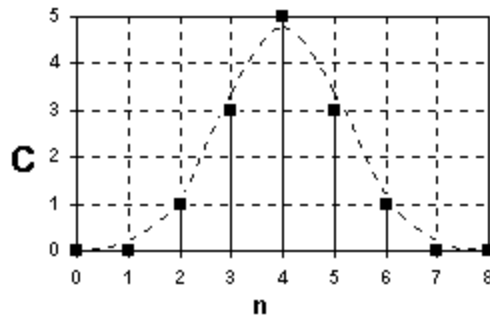


Рис. 1.3: Цифровой сигнал

и область значений принадлежат к множеству целых чисел. Цифровой сигнал может быть получен из дискретного сигнала посредством процедуры *квантования по уровню*. Производится это следующим образом.

1. Выбирается величина *шага квантования* Δx .
2. Формируется множество отсчетов сигнала $X_i = i\Delta x$, i - целое:

$$\mathbb{Q} = \{\dots X_{-3}, X_{-2}, X_{-1}, X_0 = 0, X_1, X_2, \dots\}$$

3. Исходный дискретный сигнал $x_d(n)$ замещается сигналом $X(n)$ следующим образом. В каждый момент времени n выбирается значение X_i из множества отсчетов \mathbb{Q} , наиболее близкое к $x_d(n)$:

$$x_d(n) \rightarrow X_i \text{ так что } |X_i - x_d(n)| \leq |X_j - x_d(n)| \text{ для всех } j \neq i$$

4. Полученная последовательность отсчетов $X_i(n)$ заменяется на последовательность номеров отсчетов $C(n) = i(n)$

По существу, цифровой сигнал является разновидностью дискретного сигнала при округлении отсчетов последнего до определенного количества цифр, как это показано на рис.1.3. Таким образом, для получения из аналогового сигнала дискретного необходимо последовательно провести процедуру (а) дискретизации по времени и (б) квантования по уровню. В результате, вместо непрерывного сигнала мы получаем дискретную последовательность целых чисел $C(n)$.

Большинство сигналов, с которыми приходится иметь дело при обработке данных, являются аналоговыми по своей природе, дискретизованными и квантованными в силу методических особенностей измерений или технических особенностей регистрации, т.е. преобразованными в цифровые сигналы. Но существуют и сигналы, которые изначально относятся к классу цифровых. Например, число гамма-квантов, зарегистрированных в дискретные моменты времени или почасовая зависимость число посещений интернет-сайта.

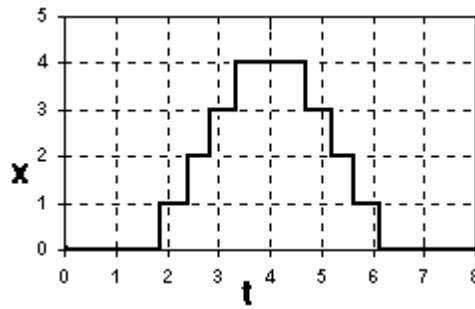


Рис. 1.4: Сигнал, восстановленный из цифрового при помощи ЦАП

1.1.3 АЦП и ЦАП

Устройство, преобразующее аналоговый сигнал в цифровой, называется аналогово-цифровым преобразователем (АЦП). В англоязычной литературе, а оттуда - и в некоторой отечественной русскоязычной - используется аббревиатура ADC (Analog-to-Digital Converter). Обратное преобразование цифровых сигналов в аналоговые выполняется цифро-аналоговым преобразователем, ЦАП (в англоязычной литературе - Digital-to-Analog Converter, DAC). Сигнал на выходе ЦАП обычно имеет ступенчатую форму, поэтому требует сглаживания, которое, как правило, выполняется при помощи фильтра нижних частот. На рис.1.4 показан типичный вид сигнала после ЦАП.

АЦП последовательно выполняет две операции над аналоговым сигналом: дискретизацию и квантование. Поэтому и основными характеристиками АЦП являются шаг дискретизации по времени τ и шаг квантования во уровню Δx . В технической документации вместо τ обычно используют обратную величину - частоту дискретизации, которую измеряют в количестве выборок в секунду $\left[\frac{\text{выб.}}{\text{с}}\right]$ или в Герцах. Вместо шага квантования в описании АЦП указывают связанную с ней величину - *разрядность АЦП*, под которой понимают число двоичных разрядов (k), используемых для записи одного квантованного значения. Так, например, предположим, что АЦП является восьмиразрядным: $k = 8$. Тогда, оно может отобразить $2^8 = 256$ целых чисел: от 0 до 255. Максимальная амплитуда сигнала на входе АЦП (X_{\max}) является фиксированной и также указывается в его техническом описании. Таким образом, весь динамический диапазон значений входного сигнала будет простирается от $-X_{\max}$ до X_{\max} . Этот диапазон делится на 256 уровней, следовательно, шаг квантования составит $2X_{\max}/256$. Из рассмотренного примера понятна связь между разрядностью АЦП k и шагом квантования Δx :

$$\Delta x = \frac{X_{\max}}{2^{k-1}}$$

Характеристики АЦП: частота дискретизации и разрядность определяют стоимость этого устройства. АЦП с высокой частотой дискретизации - достаточно дороги. Поэтому, при выборе схемы обработки сигнала необходимо представлять, какими необходимыми характеристиками должен обладать АЦП, чтобы не привести к

необратимым искажениям сигнала. В данной работе будут рассматриваться только эффекты, связанные с дискретизацией сигнала по времени, а вопросы квантования оставлены пока без внимания.

1.1.4 Связь между спектрами аналогового и дискретного сигналов

Чтобы оценить те явления, которые возникают при дискретизации сигнала, удобно перейти от временного представления сигналов к спектральному. Для этого рассмотрим сначала, как связаны спектры аналогового и дискретизованного сигналов. Пусть нам дан некоторый непрерывный аналоговый сигнал $x(t)$, которому соответствует функция спектральной плотности $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt$$

Построим другой сигнал $y(t)$, представляющий собой выборку исходного сигнала $x(t)$ в дискретные моменты времени $\tau, 2\tau, 3\tau, \dots$, аналогично тому, как это показано на рис.1.2. Для того, чтобы выражение для $y(t)$ можно было записать аналитически, введем вспомогательную функцию единичного бесконечно короткого импульса

$$\xi(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t = 0 \\ 0 & \text{при } t \neq 0 \end{cases}$$

Тогда дискретизованный сигнал можно записать аналитически:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \xi(t - n\tau) \quad (1.1)$$

Видно, что $y(t)$ отличен от нуля лишь в моменты времени, кратные шагу дискретизации τ , причем в этом случае он равен исходному сигналу. Если мы попробуем построить спектр от (1.1), то получим спектральную плотность, тождественно равную нулю. Это легко понять, если обратить внимание, что сигнал $y(t)$ равен нулю почти всюду, за исключением счетного числа точек. Чтобы обойти эту неприятность введем вспомогательный сигнал

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - n\tau) \quad (1.2)$$

где $\delta(t)$ - знаменитая дельта функция Дирака, равная нулю везде, за исключением $t = 0$, где она обращается в бесконечность. Видно, что сигнал $s(t)$ отличается от дискретной выборки $y(t)$ только своей амплитудой - она у него бесконечно велика. Однако, как мы знаем, свойства спектра не зависят от амплитуды сигнала, поскольку интегральное преобразование Фурье - линейная операция. Поэтому форма спектра для сигнала $s(t)$ будет совпадать с формой спектра для сигнала $y(t)$, при том, что величина этого спектра, как мы увидим далее, будет ненулевой.

Итак, построим функцию спектральной плотности для выборки $s(t)$ и сравним ее с $F(\omega)$:

$$F_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau) \right] \exp(-j\omega t) dt \quad (1.3)$$

Функция $\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau)$ представляет собой периодическую последовательность дельта функций с периодом τ . Следовательно, она может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \exp\left(j \frac{2\pi}{\tau} kt\right) \quad (1.4)$$

Коэффициенты C_k можно найти, используя известное соотношение между спектральной плотностью одиночного импульса (в данном случае $\delta(t)$) и коэффициентами ряда Фурье периодической последовательности таких импульсов ($\varphi(t)$):

$$C_k = \frac{1}{\tau} F_{\delta}\left(\frac{2\pi}{\tau}k\right) = \frac{1}{\tau}$$

Подставляя (1.2) в (1.1) и меняя порядок суммирования и интегрирования, получим:

$$F_s(\omega) = \frac{1}{\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp\left(-j \left[\omega - \frac{2\pi}{\tau}k\right] t\right) dt$$

Выражение под интегралом представляет собой ни что иное, как спектральную плотность сигнала $x(t)$ на частоте $\omega - \frac{2\pi}{\tau}k$. Поэтому, окончательно получаем:

$$F_s(\omega) = \frac{1}{\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - \frac{2\pi}{\tau}k\right) \quad (1.5)$$

Таким образом, из (1.5) видно, что спектр дискретизованного с равномерным шагом τ сигнала представляет собой “наложение” на спектр аналогового сигнала $F(\omega)$ его копий, сдвинутых на частоты, кратные частоте дискретизации $\omega_d = 2\pi/\tau$. Отсюда можно сделать несколько важных для практического приложения выводов:

1. Спектр дискретного сигнала - есть периодическая функция частоты с периодом, равным частоте дискретизации. Поэтому такой спектр имеет смысл измерять в полосе частот от 0 до ω_d : на других частотах он повторяется.
2. Если спектр аналогового сигнала ограничен сверху частотой ω_h , причем $2\omega_h \leq \omega_d$, то спектр дискретизованного сигнала будет представлять собой периодическое продолжение спектра аналогового сигнала (рис.1.5b).
3. Если спектр аналогового сигнала имеет сколь угодно высокие частоты или же он ограничен сверху частотой ω_h , но при этом частота дискретизации меньше удвоенной граничной частоты спектра $2\omega_h > \omega_d$, спектр периодического сигнала буде представлять собой наложение на спектр $F(\omega)$ его копий; при этом будет происходить перекрытие частей спектра как это показано на рис. 1.5с.

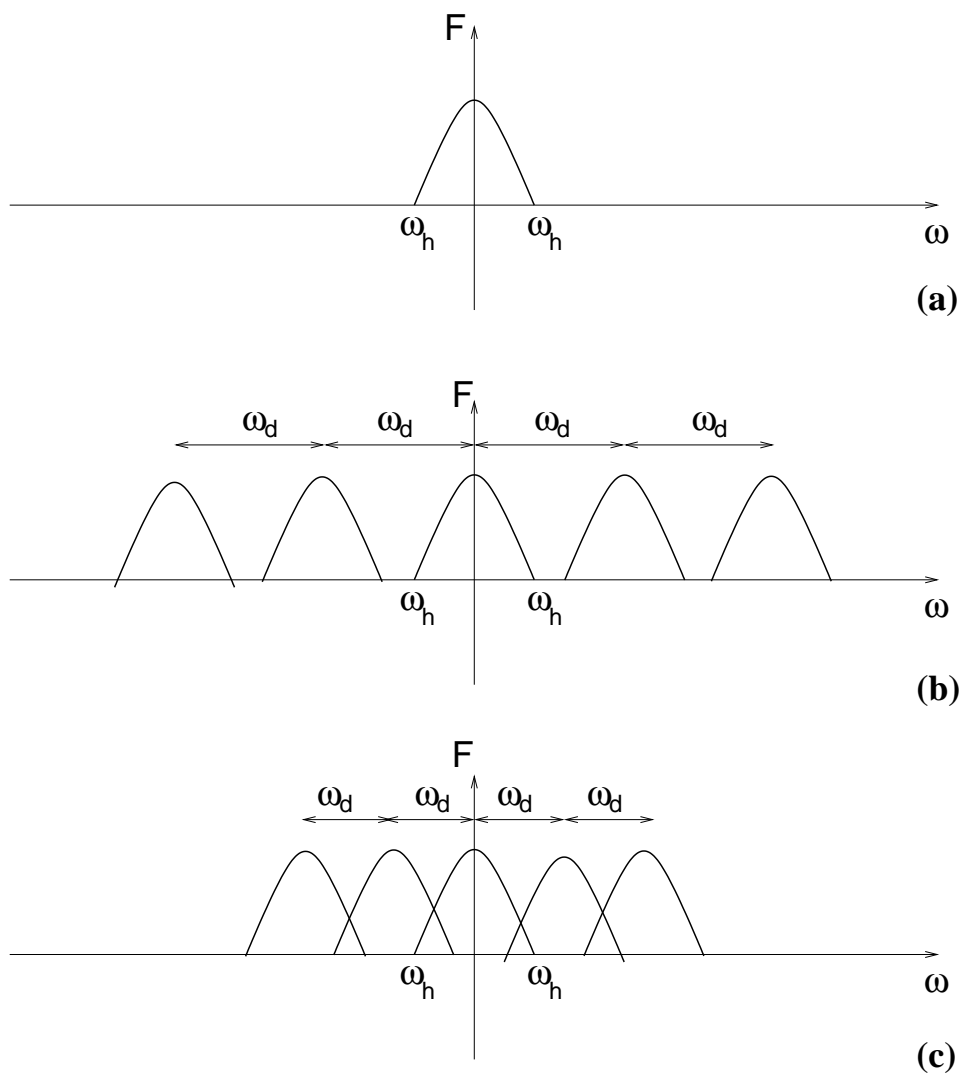


Рис. 1.5: Спектр аналогового сигнала (а) и спектры дискретизованного сигнала: (b) если $2\omega_h < \omega_d$ и (c) если $2\omega_h > \omega_d$

Из второго и третьего пунктов можно сделать важный вывод: для того, чтобы спектр дискретизованного сигнала не искажался за счет наложения, необходимо, чтобы частота дискретизации была как минимум вдвое выше максимальной частоты в спектре аналогового сигнала. Данное правило называют критерием Котельникова (а в англоязычной литературе - критерием Найквиста).

Итак, рассмотрев свойства спектра дискретизованного сигнала, мы определили условие для шага дискретизации, то есть нашли значение минимальной частоты выборки АЦП, которое достаточно для обработки сигналов с определенным характером спектра. Что произойдет, если данный критерий не будет выполнен? В этом случае, как это следует из рисунка 1.5с произойдет перекрытие спектра с собственным периодическим продолжением, таким образом, что низкочастотные составляющие спектра накладываются на высокочастотные составляющие. Такое явление называют “просачиванием” высокочастотных компонент спектра в область низких частот (в англоязычной литературе - aliasing). Предположим, что при записи акустического сигнала оркестра в помещении от какого-то устройства присутствует ультразвуковой сигнал с частотой 30 кГц. Частота сигнала находится за границей восприимчивости человеческого уха, поэтому сам сигнал слышен не будет. В спектре аналогового сигнала присутствуют две компоненты: на частоте 30 кГц и на частоте -30 кГц. Запись выполняется с дискретизацией сигнала на выходе микрофона со стандартной частотой 44.1 кГц. При прослушивании такой записи с использованием ЦАП мы услышим данный сигнал на частоте $-30 + 44.1 = 14.1$ кГц. Восстановленный сигнал будет выглядеть так, как если бы частоты, лежащие выше половины частоты дискретизации, отразились в нижнюю часть спектра и сложились с присутствующими там гармониками. Это так называемый эффект *появления ложных (кажущихся) частот*. Эффект аналогичен всем известному эффекту обратного вращения колес автомобиля на экранах кино и телевизоров, когда скорость их вращения начинает превышать частоту смены кадров. Для предотвращения появления ложных частот следует повышать частоту дискретизации или ограничить спектр сигнала перед оцифровкой фильтрами нижних частот, которые пропускают без изменения все частоты ниже частоты среза и подавляют в сигнале частоты выше частоты среза. Частота среза анти-алиасинговых фильтров устанавливается равной половине частоты дискретизации.

1.1.5 Восстановление аналогового сигнала из его равномерной выборки

Можно ли восстановить аналоговый сигнал из его выборки, произведенной с равномерным шагом? На первый взгляд ответ должен быть отрицательным: ведь при дискретизации необратимо теряется информация о значениях сигнала в моменты времени, промежуточные между точками выборки. Однако, оказывается, что такое восстановление возможно, если шаг дискретизации удовлетворяет критерию Найквиста. Действительно, если мы выберем интервал дискретизации достаточно

малым, спектр сигнала в основной полосе² не будет искажаться за счет эффекта наложения. Следовательно, если отфильтровать основную часть спектра, лежащую в полосе частот от 0 до $0.5\omega_d$, мы получим в точности спектр исходного аналогового сигнала. Поскольку процедура расчета спектра и процедура восстановления сигнала из спектра (прямое и обратное преобразование Фурье) - взаимнооднозначны, то и исходный аналоговый сигнал может быть полностью восстановлен. Покажем как можно осуществить процесс восстановления аналогового сигнала из дискретной выборки.

Пусть $x(t)$ - сигнал с ограниченным спектром: его спектр содержится в полосе частот от нуля до ω_h . Пусть, также $x_d(n)$ - его выборка с шагом дискретизации τ , которому соответствует частота дискретизации $\omega_d = 2\pi/\tau$. Предположим также, что выбор шага дискретизации соответствует критерию Найквиста: $\omega_d \geq 2\omega_h$. Запишем выражение сигнала через обратное преобразование Фурье от функции спектральной плотности:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

Поскольку, в силу критерия Найквиста, весь спектр сигнала содержится в полосе от $-0.5\omega_d$ до $0.5\omega_d$, пределы в интеграле можно заменить:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-0.5\omega_d}^{0.5\omega_d} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad (1.6)$$

Теперь, пойдем на небольшую хитрость - заменим в формуле (1.6) функцию $F(\omega)$ на ее периодическое продолжение $F_1(\omega) = F(\omega)$ если $\omega \in [-0.5\omega_d; 0.5\omega_d]$ и $F_1(\omega + \omega_d) = F_1(\omega)$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-0.5\omega_d}^{0.5\omega_d} F_1(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad (1.7)$$

Данная замена правомерна, поскольку на интервале интегрирования обе функции совпадают. С другой стороны, $F_1(\omega)$, в отличие от $F(\omega)$ - периодическая функция частоты, с периодом, равным ω_d . Следовательно, ее можно разложить в ряд Фурье:

$$F_1(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \exp\left(j \frac{2\pi k}{\omega_d} \omega\right) \quad (1.8)$$

Теперь подставим (1.8) в (1.7) и поменяем местами последовательность суммирования и интегрирования:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_{-0.5\omega_d}^{0.5\omega_d} \exp\left(j\omega \left[t + \frac{2\pi k}{\omega_d}\right]\right) d\omega \quad (1.9)$$

²Основной полосой будем называть диапазон частот от $-\omega_d/2$ до $\omega_d/2$

Интеграл в (1.9) легко берется:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \omega_d \text{Sinc}(0.5t\omega_d + \pi k) \quad (1.10)$$

Здесь $\text{Sinc}(x) = \sin(x)/x$. Чтобы найти неизвестные коэффициенты C_k подставим в (1.10) $t = -\frac{2\pi n}{\omega_d}$:

$$x\left(-\frac{2\pi n}{\omega_d}\right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \omega_d \text{Sinc}(\pi k - \pi n) \quad (1.11)$$

Так как функция $\text{Sinc}(\pi k - \pi n)$ отлична от нуля только при $n = k$ и равна в этом случае единице, то:

$$C_k = 2\pi x(-k\tau)$$

и

$$x(t) = \frac{2\pi}{\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\tau) \text{Sinc}\left(\frac{\pi t}{\tau} - \pi k\right) \quad (1.12)$$

Правая часть формулы (1.12) называется *рядом Котельникова*. В соответствии с ней, ЗНАЧЕНИЕ АНАЛОГОВОГО СИГНАЛА В ЛЮБОЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ t МОЖНО ВОССТАНОВИТЬ ПО ЗНАЧЕНИЯМ, ВЫБРАННЫМ С РАВНОМЕРНЫМ ШАГОМ τ , ЕСЛИ ШАГ ДИСКРЕТИЗАЦИИ УДОВЛЕТВОРЯЕТ КРИТЕРИЮ НАЙКВИСТА. Данное утверждение носит название *теоремы Котельникова*.

1.1.6 Дискретизация полосовых сигналов.

В разделе 1.1.4 было показано, что для устранения искажений, связанных с появлением ложных частот необходимо выбирать частоту дискретизации как минимум вдвое выше самой высокой частоты в спектре аналогового сигнала. Существуют ли исключения из этого правила? Да, оказывается для некоторых случаев можно выбирать частоту дискретизации существенно меньшей, чем это определено критерием Найквиста. Это возможно для сигналов с полосовым спектром, то есть таких, спектр которых находится в полосе частот от $f_1 > 0$ до f_2 . Для дискретизации непрерывных полосовых сигналов, нижняя частота спектра которых отлична от нуля, можно использовать метод, известный как *полосовая дискретизация*. Полосовая дискретизация в литературе упоминается под различными другими названиями, такими как дискретизация ПЧ, гармоническая дискретизация, суб-найквистовская дискретизация и дискретизация с пониженной частотой. Когда ширина спектра и центральная частота непрерывного входного сигнала позволяют, полосовая дискретизация не только дает возможность снизить требуемое быстродействие АЦП по сравнению с традиционной низкочастотной дискретизацией, но и уменьшает объем памяти, необходимый для хранения сигнала на заданном интервале.

В качестве примера рассмотрим дискретизацию сигнала с ограниченным спектром, показанного на рисунке 1.6а, у которого спектр сигнала находится в полосе

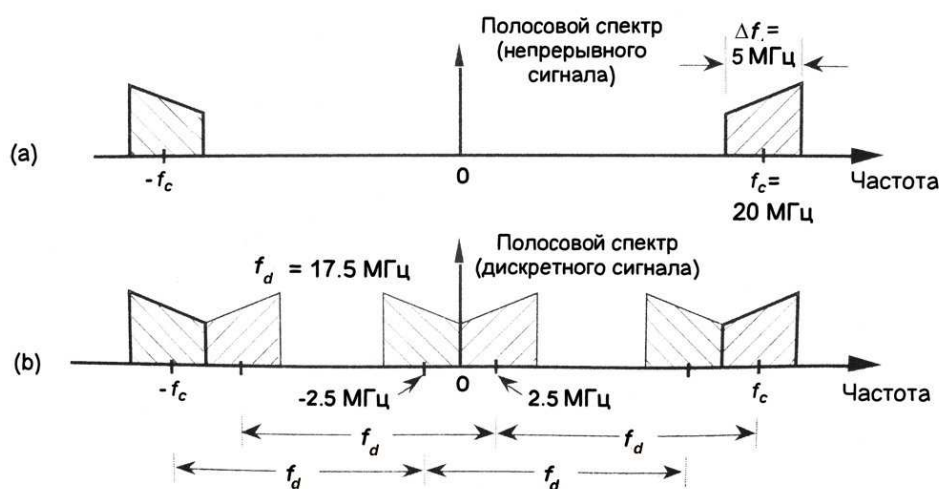


Рис. 1.6: Пример полосовой дискретизации

частот шириной $\Delta f = 5 \text{ МГц}$ и локализован в окрестности центральной частоты спектра $f_c = 20 \text{ МГц}$ (рис.1.6a). Заметим, полный спектр сигнала, как это следует из свойств спектра вещественных сигналов, состоит из гармоник на положительных частотах и зеркально симметричных им гармоник на отрицательных частотах. Для дискретизации такого сигнала, в соответствии с критерием Найквиста (дискретизация с частотой, превышающей в 2 раза наивысшую частоту в спектре сигнала), нам нужно АЦП с частотой выборки более 45 МГц. Оказывается, однако, что для полосовых сигналов можно использовать АЦП и с меньшей частотой дискретизации. Рассмотрим, что произойдет, если частота дискретизации будет равна $f_d = 17.5 \text{ МГц}$, как показано на рисунке 1.6b. Из рисунка хорошо видно, за счет чего удастся избежать наложения - копии основной части спектра "промахиваются" относительно нее, попадая в те частотные области, где спектральные компоненты аналогового сигнала отсутствуют. Действительно, область основной части спектра, располагающаяся в полосе частот около частоты $-f_c$ "копируется" в области, располагающиеся около частот $f_d - f_c = 2.5 \text{ МГц}$ и $2f_d - f_c = 15 \text{ МГц}$. Аналогично этому, область основной части спектра, располагающаяся в полосе частот около частоты f_c "копируется" в области около частот $f_c - f_d = -2.5 \text{ МГц}$ и $f_c - 2f_d = -15 \text{ МГц}$. Дискретизация не приводит к наложению, но переносит спектр сигнала в область низких частот и зеркально отражает его.

Из рассмотренного примера ясно, что можно выбрать такую частоту дискретизации, не удовлетворяющую критерию Найквиста, что наложения спектра на произойдет. В то же время, понятно, что при других частотах (к примеру $f_d = 14 \text{ МГц}$) наложение будет иметь место. Каким образом следует выбирать частоту полосовой дискретизации? Проведем формальное рассмотрение этого вопроса.

Пусть спектр аналогового сигнала является полосовым, то есть заключен в области положительных частот между $f_A > 0$ и $f_B > f_A$. Обозначим центральную частоту спектра $f_c = (f_B + f_A)/2$ и его ширину $\Delta f = f_B - f_A$. В области отрица-

тельных частот соответственно будет находиться зеркальное отражение “положительного” спектра в диапазоне частот $-f_B \leq f \leq -f_A$. Рассмотрим “клонирование” отрицательной полосы спектра при дискретизации с частотой f_d (клонирование положительной полосы будет происходить симметричным образом). За счет дискретизации в спектре появятся копии отрицательной полосы спектра на частотах $-f_B + f_d \leq f \leq -f_A + f_d$, $-f_B + 2f_d \leq f \leq -f_A + 2f_d$, $-f_B + 3f_d \leq f \leq -f_A + 3f_d \dots$. Предположим, внутри диапазона частот, занимаемого спектром аналогового сигнала $-f_B \leq f \leq f_B$ помещается k копий отрицательной полосы спектра. Это значит, что k -ая копия располагается в диапазоне частот $-f_B + kf_d \leq f \leq -f_A + kf_d$. Чтобы не было перекрытия с положительной полосой спектра ($f_A \leq f \leq f_B$), нужно, чтобы верхняя частота копии $-f_A + kf_d$ была меньше нижней частоты основной полосы f_A :

$$-f_A + kf_d \leq f_A \quad (1.13)$$

С другой стороны, следующая копия с номером $k + 1$ должна “перескочить” через основную полосу, не пересекаясь с ней. Это означает, что нижняя граница диапазона частот этой копии $-f_B + (k + 1)f_d$ должна быть выше, чем верхняя граница диапазона частот основной полосы f_B :

$$-f_B + (k + 1)f_d \geq f_B \quad (1.14)$$

Подставляя в неравенства (1.13) и (1.14) значения $f_A = f_c - \Delta f/2$ и $f_B = f_c + \Delta f/2$, и объединяя их в одно, получим критерий “правильности” выбора частоты полосовой дискретизации:

$$\frac{2f_c + \Delta f}{k + 1} \leq f_d \leq \frac{2f_c - \Delta f}{k}, \quad (1.15)$$

где k - некоторое целое положительное число. Из (1.15) легко получить условие для максимального значения k :

$$\frac{2f_c + \Delta f}{k_{max} + 1} \leq \frac{2f_c - \Delta f}{k_{max}},$$

или:

$$0 < k_{max} \leq \frac{f_c}{\Delta f} - \frac{1}{2} \quad (1.16)$$

Неравенства (1.15) и (1.16) дают возможность подобрать нужную частоту дискретизации. Вначале, из (1.16) находим максимальное значение k_{max} , затем - выбираем некоторое $k \leq k_{max}$. После этого, используя (1.15), определяем подходящее значение частоты дискретизации f_d . Так, например, для рассмотренного нами случая на рис.1.6а, максимальное значение k составляет целую часть от $20 \text{ МГц}/5\text{МГц} - 0.5$ и равняется трем. Поэтому возможные значения k для полосовой дискретизации $k = \{1, 2, 3\}$. В первом случае ($k = 1$) частота дискретизации должна лежать в диапазоне $22.5 \leq f_d \leq 35 \text{ МГц}$, во втором случае ($k = 2$) - $15 \leq f_d \leq 20 \text{ МГц}$, а в третьем ($k = 3$) - $11.25 \leq f_d \leq 13.33 \text{ МГц}$.

Спектр дискретных вещественных сигналов принято анализировать в диапазоне частот от 0 до $0.5f_d$. Это связано со свойствами симметрии спектров дискретных

сигналов. Поэтому, при полосовой дискретизации, вместо набора “копий” основной полосы спектра, цифровой анализатор спектра покажет нам только те его области, которые лежат в данной полосе частот. Возвращаясь к рисунку 1.6b, мы увидим из всей картинки только ту часть спектра, которая лежит в полосе частот шириной 8.75 МГц: то есть копию спектра аналогового сигнала, перенесенную в окрестность частоты 2.5 МГц. Таким образом, полосовая дискретизация приводит к переносу спектра в область низких частот, а также, к его возможному зеркальному отражению.

1.2 Практическая часть

В ходе эксперимента проводится дискретизация различных типовых радиосигналов (гармонические, прямоугольные, треугольные, пилообразные периодические колебания, амплитудно-модулированные колебания, шумовые колебания) с заданным шагом дискретизации и строятся спектры мощности исходного и дискретизованного сигнала. Кроме того, решается задача восстановления аналогового сигнала из дискретного при помощи ряда Котельникова.

1.2.1 Экспериментальная установка

Экспериментальная установка представляет собой компьютерную программу, созданную в среде программирования LabView, которая позволяет моделировать регулярные и шумовые радиосигналы, проводить их дискретизацию по времени с заданным равномерным шагом, строить спектры мощности аналогового и дискретизованного сигналов, восстанавливать аналоговый сигнал из его дискретной выборки, в соответствии с теоремой Котельникова. Функциональная схема изображена на рис. 1.7 В установку входит генератор сигналов, позволяющий генерировать амплитудно-модулированные колебания с гармонической огибающей:

$$x(t) = [1 + mA_2(t)] A_1(t) \quad (1.17)$$

где $A_{1,2}$ - сигналы несущей и огибающей: $A_1(t) = a\Phi(t) + b\xi(t)$, $\Phi(t)$ - радиосигнал единичной амплитуды с базовой частотой f_0 , форма сигнала выбирается из следующего набора:

- гармонический сигнал,
- периодическая последовательность прямоугольных импульсов,
- периодическая последовательность треугольных импульсов,
- периодическая последовательность пилообразных импульсов;

$b\xi(t)$ - полосовой шум с интенсивностью b , спектр которого расположен в полосе частот от f_1 до f_2 ; $A_2(t) = \cos Ft$. Сигнал от генератора подается на устройство дискретной выборки, проводящей выборку сигнала с шагом τ : $x_d(n) = x(n\tau)$. Спектр

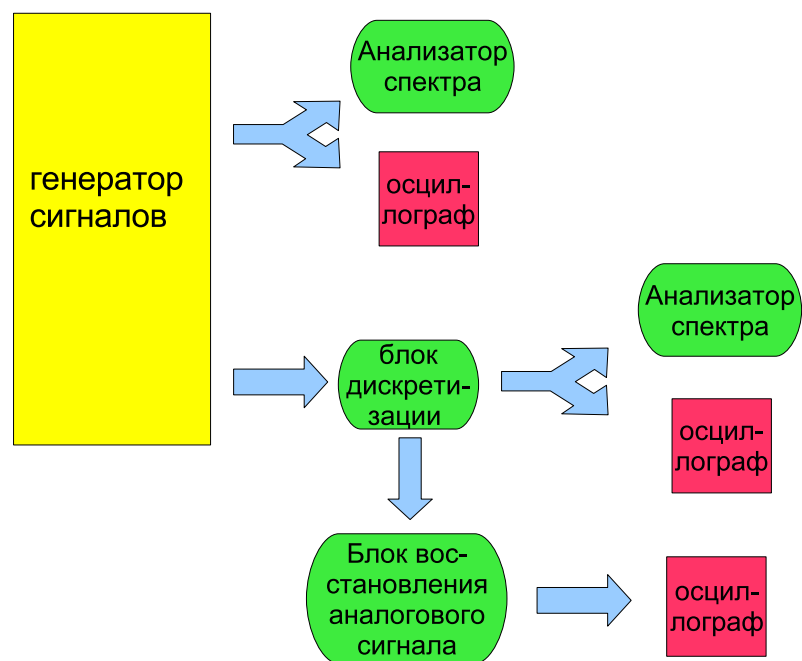


Рис. 1.7: Функциональная схема установки для анализа процессов дискретизации

обоих сигналов (аналогового и дискретного) рассчитывается посредством алгоритма ДПФ и отображается на анализаторах спектра. Форма сигналов отображается на экранах осциллографов. Устройство восстановления производит восстановление аналогового сигнала из дискретной выборки. Результат восстановления отображается на экране осциллографа. Кроме того, рассчитывается относительная погрешность восстановленного сигнала по сравнению с исходным, которая отображается на цифровом индикаторе.

На рис.1.8 приведена передняя панель установки. На ней располагаются:

1. Основной генератор (Main Generator) - многофункциональный генератор, который формирует четыре формы сигнала. Он содержит следующие элементы управления:
 - а) **Signal choice** – переключатель формы выходного сигнала. Нажатием на кнопку форма сигнала изменяется в последовательности синус – прямоугольник – треугольник – пилообразный сигнал.
 - б) **Frequency** – регулятор частоты в пределах выбранного диапазона от 0 – 100 Гц. При вращении ручки по часовой стрелке происходит увеличение частоты, против часовой стрелки – уменьшение.
 - с) **Amplitude** – регулятор амплитуды выходного сигнала от 0-5.

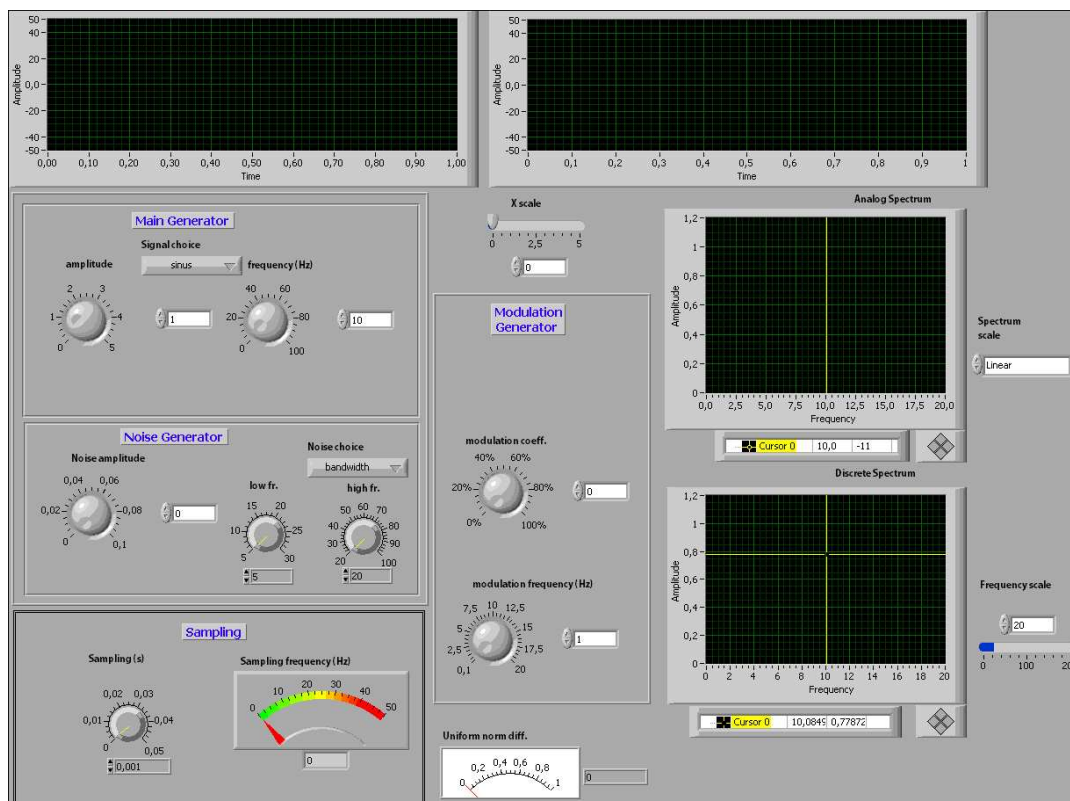


Рис. 1.8: Вид передней панели установки для исследования дискретизации сигналов

2. **Генератор Шума (Noise Generator)** - генерирует шумовой сигнал. Увеличивая амплитуду шума генератор начинает работать, при положении ручки в крайнем левом положении – генератор выключен.
 - a) Ручка **Noise choice** изменяет тип шума: случайный белый шум (uniform) и полосовой (bandwidth).
 - b) Ручки **low fr.** и **high fr.** задают полосу частот для полосового шума, диапазон изменения нижней частоты от 0 – 30 Гц, верхней от 20 – 100 Гц.
 - c) **Noise amplitude** – регулятор амплитуды шума от 0 – 0.1.
3. **Блок выбор шага дискретизации (Sampling)** Данный блок осуществляет выбор шага дискретизации аналогового сигнала. При вращении ручки **Sampling** по часовой стрелке мы увеличиваем шаг дискретизации от 0 до 0.05 и выше, что приводит к уменьшению частоты дискретизации. Частота дискретизации отображается стрелочным индикатором **Sampling Frequency**
4. **Генератор огибающей амплитудной модуляции (Modulation Generator)**
 - a) **modulation coeff.** – регулятор изменения коэффициента модуляции от 0 до 100%.
 - b) **modulation frequency** – регулятор изменения частоты модуляции от 0.1 до 20 Гц.
5. **Анализатор спектра аналогового сигнала (Analog Spectrum)**
6. **Анализатор спектра дискретного сигнала (Discrete Spectrum)**
 - a) Регулятор **Frequency** позволяет задавать полосу частот для обзора на экране анализаторов спектров.
 - b) Ручки **Spectrum scale** – выбирает масштаб расчета спектра: логарифмический или линейный.
 - c) Метка белого цвета на экране анализатора отмечает положение критической частоты Найквиста (половина частоты дискретизации).
 - d) Горизонтальный и вертикальный курсоры (желтого цвета) на экране анализатора позволяют проводить курсорные измерения.
7. **Осциллограф 1** строит исходный сигнал (зеленая кривая) и дискретную выборку (красные импульсы).
8. **Осциллограф 2** строит дискретный сигнал (зелёная огибающая) и восстановленный сигнал (огибающая ярко-синего цвета).

- a) Ручка **X scale** изменяет временной масштаб по оси абсцисс на первом и втором осциллографе.
9. Стрелочный индикатор **Uniform norm diff.** показывает среднеквадратичную относительную погрешность восстановленного сигнала из дискретного.

1.2.2 Ход работы

1. Исследование дискретизации низкочастотных сигналов.

- a) Рассмотрите дискретизацию последовательности прямоугольных, треугольных, пилообразных импульсов. Установите амплитуду и частоту сигнала. Увеличивая шаг дискретизации, следите за изменениями в спектре дискретизованных колебаний, а также за их формой. Постройте характерные виды спектров и сигналов. Экспериментально определите значение минимальной частоты дискретизации.
- b) Рассмотрите дискретизацию смеси гармонического сигнала и белого шума, смеси гармонического сигнала и полосового шума, выбрав диапазон частот шума так, чтобы он не перекрывался с основным сигналом. Проиллюстрируйте эффект наложения спектральных компонент шума на компоненты сигнала при дискретизации.

2. Исследование восстановления сигнала из его дискретной выборки

- a) Проведите исследование восстановления сигналов из дискретной выборки последовательности прямоугольных и треугольных импульсов в зависимости от шага дискретизации. Постройте характерные графики дискретизованного и восстановленного сигналов для нескольких значений частоты дискретизации. Постройте зависимость относительной погрешности восстановления от частоты дискретизации.
- b) Проведите исследование восстановления сигналов из дискретной выборки амплитудно-модулированных колебаний в зависимости от шага дискретизации. Постройте характерные графики дискретизованного и восстановленного сигналов для нескольких значений частоты дискретизации. Постройте зависимость относительной погрешности восстановления от частоты дискретизации.
- c) Проведите исследование восстановления сигналов из дискретной выборки белого и полосового шума. Постройте характерные графики дискретизованного и восстановленного сигналов для нескольких значений частоты дискретизации. Постройте зависимость относительной погрешности восстановления от частоты дискретизации.

3. Исследование полосовой дискретизации.

- a) Проведите исследование дискретизации гармонического сигнала от частоты дискретизации. Постройте характерные спектры и графики колебаний для дискретизации, удовлетворяющей критерию Найквиста и не удовлетворяющей этому критерию. Постройте зависимость частоты дискретизованного сигнала (по его спектру) от частоты дискретизации.
- b) Проведите исследование дискретизации амплитудно-модулированного сигнала от частоты дискретизации. Постройте характерные спектры и графики колебаний для дискретизации, удовлетворяющей критерию Найквиста и не удовлетворяющей этому критерию. Постройте зависимость частоты дискретизованного сигнала (по его спектру) от частоты дискретизации.

2 Лабораторная работа: Расчет спектра мощности дискретных сигналов

2.1 Краткие теоретические сведения

2.1.1 Введение

Среди множества методов анализа радиосигналов спектральные методы являются наиболее распространенными. Под спектром аналогового сигнала $x(t)$ зачастую понимают получающуюся в результате интегрального преобразования Фурье (ИПФ):

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.1)$$

комплекснозначную функцию спектральной плотности \mathcal{F} , зависящую от “круговой” частоты ω . Эту функцию называют комплексным спектром сигнала, а ее модуль и аргумент (фазу) соответственно - амплитудным и фазовым спектром. Квадрат модуля функции $\mathcal{F}(\omega)$ можно интерпретировать как плотность энергии сигнала $x(t)$, приходящуюся на частоту ω . Действительно, если принять, что $x^2(t)$ - мощность сигнала в момент времени t ¹, а также, что в соответствии с равенством Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(\omega)|^2 d\omega \quad (2.2)$$

то, значение $\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(\omega)|^2 d\omega$ представляет собой полную энергию сигнала \mathbb{E} . Следовательно $|\mathcal{F}(\omega)|^2 = d\mathbb{E}/d\omega$ - плотность энергии.

Необходимо отметить, что формула (2.1) может быть использована лишь для теоретического анализа простых и детерминированных сигналов, но никак не может служить средством для практического построения спектров. Причины этого заключаются в том, что:

- на практике невозможно наблюдать за сигналом сколь угодно долго, любые измерения являются ограниченными во времени;

¹на самом деле, если x - напряжение или ток какой либо электрической цепи, то $x^2(t)$ - величина пропорциональная мощности с коэффициентом пропорциональности в виде проводимости или сопротивления

- если сигнал $x(t)$ является случайным (а именно случайные сигналы представляют интерес для анализа), то и $\mathcal{F}(\omega)$ оказывается случайной функцией частоты, а следовательно она не будет соответствовать важнейшему свойству для любых измеряемых характеристик - повторяемостью при сходных условиях эксперимента;
- даже для сигналов конечной длительности, для расчета преобразования (2.1) необходимы значения сигнала в бесконечном числе точек (бесконечное число моментов времени).

Поэтому непосредственное использование (2.1) для анализа реальных сигналов невозможно, однако $\mathcal{F}(\omega)$ является исходной величиной для построения всех других спектральных характеристик, применяемых на практике.

2.1.2 Дискретно-временное преобразование Фурье

Перейдем теперь от аналоговых сигналов к дискретным, то есть к сигналам, значения которых определены лишь в дискретные моменты времени $t_n = n\tau$, кратные некоторому постоянному интервалу τ , называемому интервалом дискретизации:

$$x(n) = x(n\tau), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Если этот интервал достаточно мал, то интеграл в (2.1) можно заменить на сумму:

$$\mathcal{F}(\omega) \simeq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\tau) e^{-j\omega n\tau}$$

Знак примерного равенства трансформируется в строгое равенство, если τ устремить к нулю. Введем комплексную функцию $F(\omega) = \mathcal{F}(\omega)/\tau$. Кроме того, перейдем от “обычной” частоты ω к безразмерной частоте $\bar{\omega}$, нормировав ω на частоту дискретизации $f_d = 1/\tau$: $\bar{\omega} = \omega\tau$. Тогда, функция

$$F(\bar{\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\bar{\omega}n} \quad (2.3)$$

будет иметь характер комплексной спектральной плотности, зависящей от нормированной частоты $\bar{\omega}$. Формула (2.3) носит название “дискретно-временное преобразование Фурье” (ДВПФ).

Также как и интегральное преобразование Фурье, выражение (2.3) трудно применить для построения спектров экспериментальных сигналов. Его используют обычно для анализа спектров таких сигналов, форма которых может быть задана в виде элементарных математических функций (например, $\sin(\bar{\omega}n)$ и т.п.). Из (2.3) легко вывести основные свойства ДВПФ:

1. Линейность:

$$F_{\sum_i \alpha_i x_i}(\bar{\omega}) = \sum_i \alpha_i F_{x_i}(\bar{\omega})$$

α_i - любые постоянные числа.

2. Симметричность относительно нулевой частоты (для вещественных сигналов):

$$F(-\bar{\omega}) = F^*(\bar{\omega})$$

3. Инвариантность модуля ДВПФ относительно смещения сигнала на постоянный интервал времени n_0 :

$$F_{x(n-n_0)}(\bar{\omega}) = F_{x(n)}(\bar{\omega})e^{-jn_0\bar{\omega}}$$

Данное свойство очень важно для спектрального анализа. Из него следует, что амплитудный спектр $|F(\bar{\omega})|$, который в основном и интересует исследователей, инвариантен к выбору начального момента времени, а фазовый - инвариантен с точностью до любой линейной функции частоты.

4. Периодичность с периодом 2π : $F(\bar{\omega} + 2\pi) = F(\bar{\omega})$.
5. Симметрия относительно частоты $\bar{\omega} = \pi$ (только для вещественных сигналов): $F(\pi - \bar{\omega}) = F^*(\pi + \bar{\omega})$.

Свойства (1) - (3) выполняются как для ИПФ, так и для ДВПФ, а вот свойства (4), (5) - только для ДВПФ. Из них следует, что нет смысла измерять спектр во всем диапазоне частот, а достаточно построить его для интервала $\bar{\omega} \in [0 : \pi]$, поскольку для остальных значений его легко получить при помощи свойств симметрии и периодического продолжения. Отсюда: *любые методы цифрового спектрального анализа дают значения любых спектральных характеристик только в диапазоне нормированных частот $\bar{\omega} \in [0 : \pi]$* . При этом, верхней граничной частоте диапазона $\bar{\omega} = \pi$ на шкале “реальных” частот соответствует частота, равная половине частоты дискретизации $\omega = 2\pi f_d/2$.

2.1.3 Дискретное преобразование Фурье

Перейдем теперь от “идеализированных” сигналов к реальным, которые всегда имеют ограниченную длительность во времени $n \in [0 : N - 1]$. Из теоремы Котельникова (см. раздел 1.1.5) известно, что если аналоговый сигнал имеет ограниченный по частоте спектр, то сигнал может быть точно восстановлен по своей дискретной выборке. Это свойство, благодаря дуальности спектров и сигналов, может быть обращено и на спектры, а именно: если сигнал является ограниченным по времени, то его непрерывный спектр может быть точно восстановлен по дискретной выборке спектра. Давайте докажем это свойство.

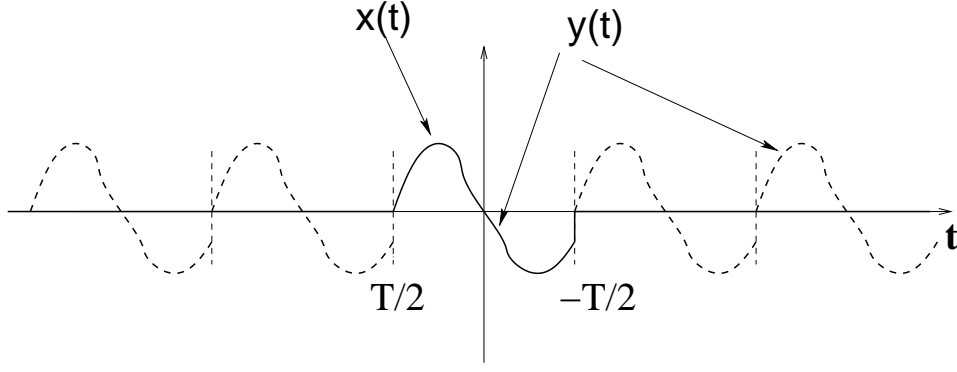


Рис. 2.1: Сигнал $x(t)$ и его периодическое продолжение $y(t)$

Рассмотрим сначала аналоговые, ограниченные во времени сигналы. Пусть аналоговый сигнал $x(t)$ отличен от нуля только на ограниченном интервале времени: $x(t) \neq 0$ при $t \in [-T/2 : T/2]$, где T - длительность сигнала ². Запишем для него ИПФ, учитывая при этом, что за пределами указанного интервала времени сигнал равен нулю:

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.4)$$

Введем для сигнала $x(t)$ его периодическое продолжение на всю временную ось, продолжив его с периодом T (см. рис.2.1):

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \text{ если } t \in [-T/2 : T/2] \\ y(t+T) &= y(t) \end{aligned}$$

Сигнал $y(t)$ полностью совпадает с $x(t)$ на интервале интегрирования, а значит его можно поставить в формулу (2.4), которая при этом не изменится:

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} y(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.5)$$

Поскольку $y(t)$ - периодический сигнал, он может быть представлен в виде дискретного ряда Фурье:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt} \quad (2.6)$$

Подставим это представление в формулу (2.5), поменяв местами суммирование и интегрирование, и вынеся постоянные C_k за знак интеграла:

$$\mathcal{F}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_{-T/2}^{T/2} y(t) e^{-j(\omega - \frac{2\pi}{T}k)t} dt \quad (2.7)$$

²здесь используется интервал, симметричный относительно нуля только потому, что для него все выкладки осуществляются максимально просто; для интервала $t \in [0 : T]$ все спектральные характеристики домножаются на соответствующий фазовый множитель

Интеграл в (2.7) легко берется, в результате чего получаем:

$$\mathcal{F}(\omega) = -T \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \text{Sinc} \left(\frac{\omega T}{2} - \pi k \right) \quad (2.8)$$

Здесь под функцией *Sinc* обозначена хорошо известная в радиотехнике функция $\sin(x)/x$. Найдем теперь неизвестные коэффициенты C_k . Для этого подставим в формулу (2.8) значение частоты, кратное частоте $\omega_0 = 2\pi/T$:

$$\mathcal{F}(n \frac{2\pi}{T}) = -T \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \text{Sinc}(\pi n - \pi k)$$

Вспомним, что функция $\text{Sinc}(i\pi)$ равна нулю для всех целых $i = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ за исключением $i = 0$, для которого она равна единице. Поэтому от всей суммы останется только одно слагаемое, соответствующее $n = k$:

$$\mathcal{F}(n \frac{2\pi}{T}) = -T C_n,$$

откуда:

$$C_k = -\frac{1}{T} \mathcal{F}(k \frac{2\pi}{T})$$

Подставляя его в (2.8) получим связь между значениями спектральной плотности на любой частоте и значениями ее на дискретных частотах $\omega_k = k\omega_0$:

$$\mathcal{F}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(k \frac{2\pi}{T}) \text{Sinc} \left(\frac{\omega T}{2} - \pi k \right) \quad (2.9)$$

Таким образом, если сигнал является ограниченным во времени, его спектр однозначно определяется значениями спектральной плотности в дискретном числе точек $\omega_k = k\omega_0$: $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}(k\omega_0)$. Поэтому, на практике достаточно построить спектр в этих точках. *С этой (прикладной) точки зрения будем говорить, что спектр ограниченных во времени сигналов является дискретным.* Расстояние по частоте между двумя соседними гармониками этого спектра равно ω_0 , поэтому, эту частоту будем называть *частотой разрешения* спектра.

Вернемся теперь к дискретным сигналам $x(n)$. Спектр дискретных сигналов ограничен сверху по частоте частотой дискретизации $\omega_d = 2\pi/\tau$. С другой стороны, если сигнал ограничен во времени, то его спектр - дискретный с частотой ω_0 . Поэтому, для дискретного, ограниченного во времени сигнала $x(n) = x(n\tau)$, $n = 0, \dots, N-1$, спектр будет содержать ограниченное число гармоник на частотах: $0, \omega_0, 2\omega_0, \dots, (N-1)\omega_0$. Действительно, если мы разделим частотный интервал $2\pi/\tau$ на частоту разрешения $2\pi/T = 2\pi/N\tau$, то получим, что спектр содержит N гармоник.

Для нахождения этих гармоник, воспользуемся формулой (2.4), применив ее на частоте $\omega_k = k\omega_0$, заменив интеграл на интегральную сумму, и, приняв, что сигнал

$x(n\tau)$ отличен от нуля на интервале времени $0 \leq t < N\tau$:

$$\mathcal{F}(k\omega_0) \simeq \sum_{n=0}^{N-1} x(n\tau) e^{-jk\omega_0 n\tau} \tau$$

Обозначив $X(k) = \mathcal{F}(k\omega_0)/\tau$, заменив знак примерного равенства на строгое равенство (то есть считая интервал τ достаточно малым, и учтя, что $\omega_0 = 2\pi/N\tau$, получим выражение:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \quad (2.10)$$

которое используется для практического расчета спектров дискретных и ограниченных во времени сигналов. Оно получило название *дискретное преобразование Фурье (ДПФ)*, иногда его также называю дискретным рядом Фурье. Величина $X(k)$ называется комплексной амплитудой k -ой гармоники спектра. Индексу k соответствует физическая частота $\omega_k = 2\pi k/N\tau$ или нормированная частота $\bar{\omega}_k = 2\pi k/N$. Таким образом, набор $\{X_k\}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ будем в дальнейшем называть комплексным спектром дискретного, ограниченного во времени сигнала $x(n)$, модули этих величин $|X_k|$ - его амплитудным, а аргументы $\varphi_k = \arctan\left(\frac{\text{Im}X_k}{\text{Re}X_k}\right)$ - фазовым спектром.

Рассмотрим основные свойства ДПФ. Легко увидеть, что они повторяют свойства ДВПФ:

1. Линейность:

$$X_{\sum_i \alpha_i x_i}(k) = \sum_i \alpha_i X_{x_i}(k)$$

α_i - любые постоянные числа.

2. Симметричность относительно нулевой частоты (для вещественных сигналов):

$$X(-k) = X^*(k)$$

3. Инвариантность модуля ДПФ при смещении сигнала на постоянный интервал времени n_0 :

$$X_{x(n-n_0)}(k) = X_{x(n)}(k) e^{-j2\pi kn_0/N}$$

4. Периодичность с периодом N : $X(k+N) = X(k)$.

5. Симметрия относительно гармоники $N/2$ (только для вещественных сигналов, и если N - четное): $F(\frac{N}{2} - k) = F^*(\frac{N}{2} + k)$.

Из свойства (5) следует, что для вещественных сигналов достаточно построить $N/2$ гармоник, а оставшиеся $N/2$ получаются из них с помощью свойства симметрии. Поэтому большинство методов цифрового спектрального анализа по вещественному сигналу из N отсчетов определяет $N/2$ гармонических составляющих спектра.

2.1.4 Явление “растекания спектра”

Рассмотрим теперь проблему построения спектра для ограниченного во времени сигнала с другой стороны. На практике мы обычно сталкиваемся с ситуацией, когда исследуемый сигнал $x(t)$ доступен для анализа в течение ограниченного интервала времени T , меньшего, чем длительность самого сигнала. Данный интервал принято называть *временным окном*. Как выглядит сигнал за пределами этого окна мы не знаем. Соответственно, задача построения спектра $x(t)$ не имеет однозначного решения: спектры будут разными в зависимости от продолжения сигнала за пределы временного окна. В этом случае, принято использовать в качестве такой интерполяции периодическое продолжение с периодом T , что позволяет применить для построения спектра дискретизованного сигнала описанное в предыдущем разделе дискретное преобразование Фурье. При этом, результат спектрального анализа будет существенным образом зависеть от длительности временного окна. Рассмотрим эту зависимость подробнее.

Выберем для простоты гармонический сигнал $x(t) = \cos(\Omega t)$, функция спектральной плотности для которого, как легко подсчитать представляет собой сумму дельта-функций Дирака:

$$\mathcal{F}(\omega) = \delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)$$

Пусть временное окно, в течение которого сигнал доступен для наблюдения, имеет длительность T . Выберем его для упрощения выкладок симметрично относительно нулевого момента времени: введем функцию временного окна $W(t)$, равную единице на интервале наблюдения и равную нулю вне его:

$$W(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-T/2 : T/2] \\ 0 & t \notin [-T/2 : T/2] \end{cases} \quad (2.11)$$

Наблюдаемый сигнал $y(t)$ есть исходный сигнал $x(t)$, умноженный на функцию окна: $y(t) = x(t)W(t)$. Построим спектр наблюдаемого сигнала $y(t)$:

$$\mathcal{F}_y(\omega) = \frac{T}{2} \left(\text{Sinc} \left((\omega - \Omega) \frac{T}{2} \right) + \text{Sinc} \left((\omega + \Omega) \frac{T}{2} \right) \right) \quad (2.12)$$

Так как спектр симметричен относительно нулевой частоты, ограничимся областью положительных частот: $\mathcal{F}_y^+(\omega) = \frac{T}{2} \text{Sinc} \left((\omega - \Omega) \frac{T}{2} \right)$. Характерная форма спектра показана на рис.2.2b: максимальное значение спектральной плотности достигается на частоте Ω . “Горб” функции $\mathcal{F}_y(\omega)$ на этой частоте называется “основным лепестком”. Величина (амплитуда) основного лепестка прямо пропорциональна длительности временного окна T . Основной лепесток ограничен справа и слева “нулями” функции спектральной плотности на частотах $\Omega + 2\pi/T$ и $\Omega - 2\pi/T$. При неограниченном увеличении длительности временного окна $T \rightarrow \infty$ амплитуда лепестка стремится к бесконечности, а его ширина - к нулю, и спектральная плотность становится все больше и больше похожа на дельта функцию $\mathcal{F}_y^+(\omega) \rightarrow \delta(\omega - \Omega)$. Кроме

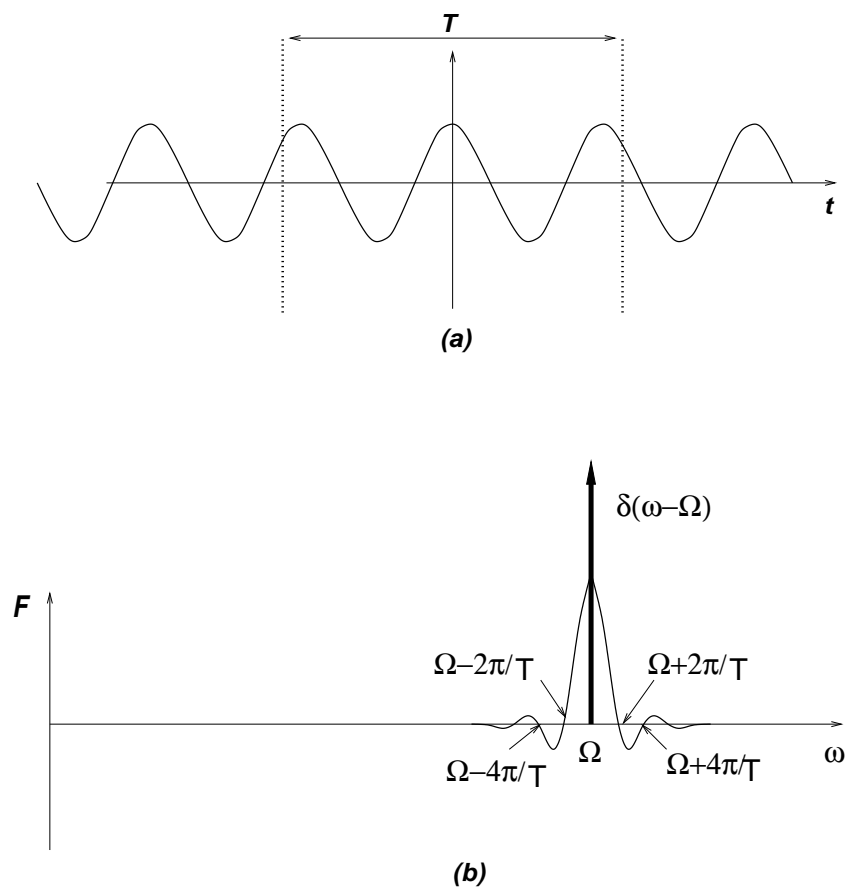


Рис. 2.2: Гармонический сигнал во временном окне (а) и его функция спектральной плотности (b)

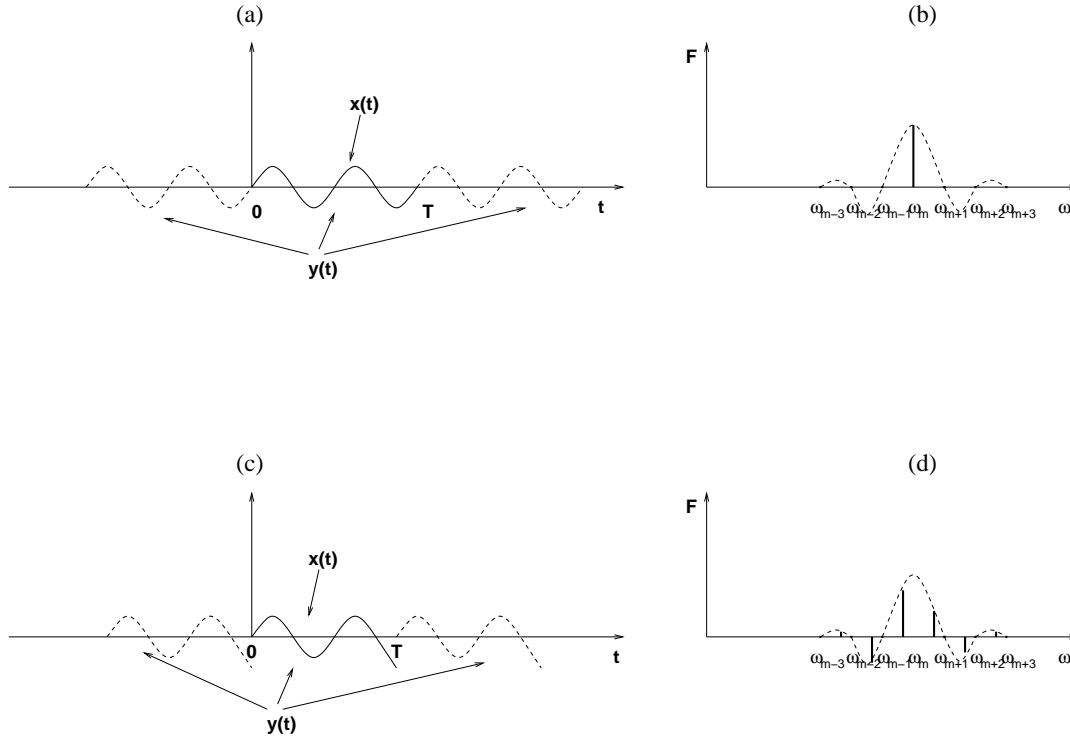


Рис. 2.3: Явление растекания спектра: (а) сигнал $x(t)$ и его периодическое продолжение $y(t)$ (длительность сигнала кратна периоду); (б) спектр сигнала $y(t)$; (с) сигнал $x(t)$ и его периодическое продолжение $y(t)$ (длительность сигнала не кратна периоду); (д) спектр сигнала $y(t)$

основного лепестка спектр содержит также “боковые лепестки”, которые примыкают к основному. Их ширина равна $2\pi/T$, а амплитуда быстро падает по отношению к амплитуде основного лепестка с увеличением номера: $2/3\pi$, $2/5\pi$, $2/7\pi$, ..., $2/(1+2M)\pi$, ... (M - номер лепестка).

Перейдем теперь от спектральной плотности к дискретному спектру, то есть к спектру периодического продолжения сигнала $x(t)$ с периодом, равным длительности временного окна. Этот спектр представляет собой набор гармоник на частотах $\omega_k = 2\pi k/T$, $k = 0, 1, 2, \dots$, величина которых пропорциональна спектральной плотности $\mathcal{F}_y(\omega)$. Здесь нужно различить два характерных случая:

1. Длительность временного окна кратна периоду сигнала:

$$T = m \frac{2\pi}{\Omega} \quad (2.13)$$

m - целое число. Из (2.13) следует, что гармоника спектра с номером $k = m$ точно приходится на базовую частоту периодического сигнала Ω : $\omega_m = 2\pi m/T = \Omega$ (см. рис.2.3а,б). Все же остальные гармоники, соответствующие частотам $\omega_{m\pm 1} = \Omega \pm 2\pi/T$, $\omega_{m\pm 2} = \Omega \pm 4\pi/T$, $\omega_{m\pm 3} = \Omega \pm 6\pi/T$, ... попадают в “нули” функции спектральной плотности и, соответственно, их амплитуда

оказывается равной нулю. Таким образом, спектр сигнала в данном случае содержит единственную гармонику на частоте Ω , то есть качественно совпадает со спектром исходного сигнала $x(t)$.

2. Длительность временного окна не равна целому числу периодов сигнала $x(t)$:

$$T = m \frac{2\pi}{\Omega + \Delta\Omega} \quad (2.14)$$

m - целое число, $\Delta\Omega \ll \Omega$ - малая добавка к частоте. В этом случае, ни одна из гармоник ω_k не попадает точно на значение частоты Ω , ближайшая к ней гармоника с номером m соответствует частоте $\Omega + \Delta\Omega$ (см рис.2.3с,d). Кроме того, остальные гармоники $\omega_{m\pm1} = \Omega + \Delta\Omega \pm 2\pi/T$, $\omega_{m\pm2} = \Omega + \Delta\Omega \pm 4\pi/T$, $\omega_{m\pm3} = \Omega + \Delta\Omega \pm 6\pi/T$, ... также “промахиваются” мимо нулей функции спектральной плотности на ту же величину $\Delta\Omega$. Поэтому спектр анализируемого сигнала будет содержать основную гармонику на частоте $\Omega + \Delta\Omega$, а также бесконечное множество дополнительных (боковых) гармоник на частотах $\Omega + \Delta\Omega \pm 2k\pi/T$.

Итак, дискретный спектр одного и того же сигнала кардинальным образом меняется при небольшом изменении длительности временного окна. Оптимальным является такой выбор временного окна, когда его длительность составляет целое число периодов сигнала. В этом случае окно не искажает вид спектра. Отчего так происходит? Это легко понять, если вспомнить, что дискретный спектр строится по периодическому продолжению сигнала. Легко увидеть (рис. 2.3а), что если период этого продолжения составляет целое число периодов сигнала - продолженный сигнал совпадает с истинным. Если же нет - то на граничных точках периодического продолжения возникают разрывы (рис. 2.3с). В результате сигнал $y(t)$ более не является копией сигнала $x(t)$, а значит и вид его спектра будет отличаться от вида спектра исходного сигнала:

- он будет содержать дополнительные гармонические составляющие, которых нет в спектре исходного сигнала (боковые лепестки);
- частота основной гармоники спектра окажется сдвинутой относительно “истинной” частоты.

Такое искажение спектра, вызванное ограниченностью временного окна называют “растеканием” спектра.

Явление растекания спектра мешает проведению спектральных измерений. Один и тот же сигнал может давать существенно разные спектры при разном выборе параметров расчета. Как бороться с этим явлением? Ясно, что увеличение длительности временного окна уменьшает растекание, однако, не всегда есть возможность наблюдать за сигналом сколь угодно долго. Если длительность окна увеличить нельзя, то можно устранить растекание подобрав его длительность кратной периоду сигнала. Беда в том, что основная масса сигналов неперiodические. В этом

случае полностью устранить растекание не удастся. Однако, можно его сделать меньшим, если у сигнала есть некоторый “характерный период” T , то есть интервал времени, через который он почти повторяется: $x(t + T) \simeq x(t)$. Для этого следует выбрать время наблюдения кратным к T . Если же исследуемый сигнал - шумовой без ясно выраженного периода колебаний, то растекание сигналов короткой длительности является неустранимым явлением. При этом, как уже было сказано выше, в спектре “укороченного” сигнала появляется множество дополнительных гармоник, отсутствующих в спектре исходного. Часть этих гармоник (одна или две) располагаются в основном лепестке, часть - формируют боковые лепестки (по одной гармонике на каждый лепесток). Основной и боковые лепестки по-разному могут влиять на результат измерений. Например, широкий основной лепесток нежелателен, если нужно различить в спектре два периодических сигнала с близкими базовыми частотами и почти равными амплитудами: перекрытие их основных лепестков мешает их разделению. В то же время, наличие боковых лепестков в данном случае не столь важно. С другой стороны, если нам нужно различить слабый сигнал на фоне сильного, существенно “нейтрализовать” его боковые лепестки, потому что спектральные составляющие слабого сигнала легко могут быть замаскированы ими, даже если базовые частоты сигналов существенно различаются. Существует метод “перераспределения” растекания спектра между основным и боковыми лепестками. Этот метод называется “выбором формы временного окна”. Он заключается в специальном подборе функции $W(t)$. Временное окно простейшей формы (2.11), о котором говорилось выше, называется “прямоугольным окном”. Кроме него, возможны другие формы, такие как треугольное окно, окно Гаусса и другие. Каждое из этих окон характеризуется своими характеристиками: шириной основного лепестка, высотой боковых лепестков относительно основного, скоростью спада высоты боковых лепестков с увеличением их номера. Для указанных окон эти характеристики приведены в таблице 2.1.

Как видно из таблицы, ни одно из окон не дает возможность улучшить все расчетные характеристики, а лишь улучшает одни из них, за счет ухудшения других. Это правило является универсальным: выбор формы временного окна не позволяет уменьшить явление растекания спектра, а лишь улучшает какую-то из характеристик. При этом остальные характеристики за счет этого ухудшаются.

2.1.5 Основное соотношение для спектров детерминированных сигналов

Как было показано в разделе 2.1.3, частотный интервал между соседними гармониками (частота разрешения) определяется длительностью сигнала (длительность временного окна). Так для дискретного сигнала $x(n)$, нормированная частота разрешения $\bar{\omega}_0$ определяется числом точек выборки сигнала N :

$$\bar{\omega}_0 = \frac{2\pi}{N},$$

	Прямоугольное	Треугольное	Гаусса
Вид функции $W(n)$	$w(n)$	$(1 - 2\alpha(n)) w(n)$	$\exp \left[-12.5 (1 - 2\alpha(n))^2 \right]$
Ширина главного лепестка (на уровне половинной мощности, измеряется числом гармоник ДПФ)	0.89	1.28	1.33
Относительная высота боковых лепестков (dB)	-13.3	-26.5	-42
Скорость спада боковых лепестков (dB)	-6	-12	-6

Таблица 2.1: Характеристики временных окон. Функция прямоугольного окна

$$w(n) = \begin{cases} 1 & \text{если } n \in [0 : N - 1] \\ 0 & \text{если } n \notin [0 : N - 1] \end{cases}, \alpha(n) = \left| \frac{n - (N-1)/2}{N-1} \right|$$

а для аналогового сигнала $x(t)$ частота разрешения ω_0 определяется его длительностью:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Отсюда легко получаем *основное соотношение для спектров детерминированных сигналов*, которое связывает разрешение спектра и длительность доступного для анализа сигнала:

$$\omega_0 T = 2\pi \quad (2.15)$$

Это соотношение является очень важным для практики. Так как произведение длительности сигнала на частоту разрешения является постоянной величиной, которая не может быть уменьшена использованием каких-либо технических ухищрений (также как и знаменитое соотношение неопределенности в квантовой физике), то существует минимальное разрешение в спектре, которое мы можем достичь при заданной длительности сигнала.

2.1.6 Спектр мощности случайных сигналов

Основной интерес для радиофизики представляют случайные шумовые сигналы, поскольку только такие сигналы могут быть использованы для передачи информации. Случайный сигнал представляет собой зависимую от времени случайную величину $X(t)$. Если мы проведем измерения случайного сигнала в течение некоторого интервала времени T , то получим некоторую временную реализацию процесса $x_1(t)$, $0 \leq t \leq T$. При следующем измерении временная реализация $x_2(t)$ будет уже иной: $x_1(t) \neq x_2(t)$. Набор (ансамбль) временных реализаций случайного процесса $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)\}$, полученных на едином временном интервале,

позволяет рассчитать статистические характеристики, характеризующие случайный процесс. Одной из таких характеристик является спектр мощности случайного процесса (случайного сигнала).

Случайные сигналы делятся на стационарные и нестационарные. Стационарными называются такие процессы, статистические характеристики которых не зависят от начального момента времени. В частности, одномерная плотность вероятности процесса ρ не зависит от времени: $\rho(t) = \text{Const}$, а автокорреляционная функция K зависит только от разности моментов времени: $K(t_1, t_2) = K(t_2 - t_1)$. Среди стационарных процессов выделяют также эргодические процессы, это такие случайные процессы, для которых среднее значение, вычисленное по ансамблю реализаций, совпадает со средним значением, подсчитанным при усреднении по времени. В дальнейшем будем считать, что все рассматриваемые случайные процессы являются эргодическими.

Возьмем одну из реализаций случайного дискретного процесса $x(n)$, длительностью N : $(x_i(0), x_i(1), \dots, x_i(N-1))$, i - номер реализации. Для этой временной реализации можно построить ДПФ:

$$X_i(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_i(n) e^{-j2\pi kn/N}$$

Здесь $X_i(k)$ - спектр, построенный по реализации $x_i(n)$. Его называют также *периодограммой* отдельной реализации случайного процесса. Так как процесс является случайным, все временные реализации $x_i(n)$, $i = 1, 2, \dots, M$ - будут разными, а значит и разными будут соответствующие периодограммы $X_i(k)$. Соответственно функция $X_i(k)$ будет характеризовать не спектр случайного сигнала, а лишь спектр одной из его реализаций и будет являться случайной функцией частоты. При другом выборе временной реализации мы получим другую периодограмму. *Использование периодограммы $X_i(k)$ в качестве спектра случайного сигнала - характерная ошибка спектрального анализа.* Для получения спектра случайного процесса необходимо провести операцию статистического усреднения по ансамблю периодограмм $\{X_i(k)\}_{i=1}^M$. Однако, нельзя усреднять сами периодограммы - они не являются инвариантными к выбору начального момента времени: каждая из них будет отличаться на свой экспоненциальный множитель $e^{-j2\pi kn_0/N}$ в соответствии со свойством (3) ДПФ. Поэтому усредняют либо модули $|X_i(k)|$ (амплитудный спектр), либо, чаще всего - квадраты модулей $|X_i(k)|^2$ (спектр мощности).

Рассмотрим методику построения спектра мощности случайного дискретного сигнала. Для анализа берется некоторая временная реализация сигнала, длиной L точек.

1. Временная реализация делится на ансамбль из M более коротких реализаций длительностью N точек, так что $L = M \times N$:

$$\left\{ \underbrace{x(0), x(1), \dots, x(N-1)}_{\text{1-ая реализация}}, \underbrace{x(2N), \dots, x((M-1)N), \dots, x(L-1)}_{\text{M-ая реализация}} \right\}$$

Получаем ансамбль реализаций $x_i(n)$, $i = 1, 2, \dots, M$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$.

2. Выбираем соответствующую функцию временного окна $W(n)$. Домножаем каждую из реализаций на эту функцию³:

$$y_i(n) = x_i(n)W(n)$$

3. По каждой реализации посредством ДПФ строим периодограмму:

$$Y_i(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y_i(n) e^{-j2\pi kn/N}$$

4. Подсчитываем *выборочные* спектры мощности:

$$P_i(k) = Y_i(k)Y_i^*(k)$$

5. Подсчитываем *оценку спектра мощности*, усредняя по ансамблю выборочные спектры:

$$\hat{P}(k) = \langle P_i(k) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M P_i(k) \quad (2.16)$$

Функция $\hat{P}(k)$ называется оценкой спектра мощности, поскольку она строится по конечному ансамблю из M реализаций. Истинный спектр мощности получится, если мы возьмем бесконечно большое число выборочных спектров для взятия среднего:

$$P(k) = \lim_{M \rightarrow \infty} \hat{P}(k) \quad (2.17)$$

При реальных измерениях длительность шумового сигнала всегда конечна, а значит конечны длительность отдельной реализации N и число реализаций M . Ясно что сигнал ограниченной длительности $L = M \times N$ можно разбить на под-реализации множеством разных способов. Например, если общая длительность дискретного сигнала составляет 1000 отсчетов, можно “нарезать” 100 временных реализаций по 10 точек в каждой, можно - 10 реализаций по 100 точек, а можно оставить одну длинную реализацию в 1000 отсчетов. Какое из таких разбиений лучше? Чтобы ответить на этот вопрос, надо понять за что отвечают параметры M и N . Что касается длительности под-реализации N , то ответ уже был дан в разделе 2.1.3: она определяет разрешающую способность спектра $\bar{\omega}_0 = 2\pi/N$. Рассмотрим теперь параметр M .

Если рассматриваемый процесс является “истинно” случайным, например является белым шумом с нормальным распределением, то в теории спектров показано,

³Этот пункт может быть опущен, если используется прямоугольное окно. В этом случае $y_i(n) = x_i(n)$

что дисперсия спектра мощности, подсчитанного по одной реализации, при больших N стремится к значению квадрата спектра мощности:

$$D_{p_i}(k) = \langle P_i^2(k) - P^2(k) \rangle \xrightarrow{M \rightarrow \infty} P^2(k)$$

Иными словами “ошибка” при расчете спектра мощности по одной реализации сопоставима со значением самого спектра мощности. Именно поэтому спектр мощности, подсчитанный по одной периодограмме, как уже было сказано выше, не может характеризовать спектр мощности случайного процесса: оценка, полученная по одной периодограмме является несостоятельной. Если же мы подсчитаем среднее по M периодограммам, то в соответствии с теорией вероятности дисперсия для среднего по M независимым измерениям уменьшается в M раз:

$$D_{\hat{p}}(k) = \frac{D_{p_i}(k)}{M} \simeq \frac{P^2(k)}{M}$$

Тогда среднеквадратичное отклонение оценки спектра мощности по M периодограммам $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{D_{\hat{p}}(k)}$ будет уменьшаться с ростом числа периодограмм как $1/\sqrt{M}$:

$$\sigma_{\hat{p}} = \frac{P(k)}{\sqrt{M}}$$

Чем меньше среднеквадратичное отклонение, тем достовернее оценка спектра мощности. Отношение значения квадрата спектра мощности к дисперсии его оценки называют *качеством расчета спектра* или его *статистической устойчивостью* (Q):

$$Q = \frac{P^2(k)}{D_{\hat{p}}(k)} = M \quad (2.18)$$

Таким образом, число периодограмм влияет на статистическую устойчивость расчетного спектра мощности.

Если перемножить значение разрешающей способности спектра $\overline{\omega}_0$ на число точек временного ряда L и разделить на статистическую устойчивость Q то получим постоянную 2π . Действительно:

$$\frac{\overline{\omega}_0 L}{Q} = \frac{\frac{2\pi}{N} L}{M} = 2\pi \quad (2.19)$$

Выражение (2.19) называется основным соотношением для спектров случайных дискретных сигналов. Из него видно, что если число точек временного ряда фиксировано ($L = Const$), то можно либо повысить разрешающую способность (уменьшить $\overline{\omega}_0$) за счет понижения качества расчета спектра (уменьшить Q), либо, наоборот, улучшить статистическую устойчивость расчета спектра (увеличить Q), одновременно ухудшив его разрешающую способность. Для спектров случайных аналоговых сигналов выражение (2.19) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\omega_0 T}{Q} = 2\pi$$

где T - полное время анализа аналогового сигнала.

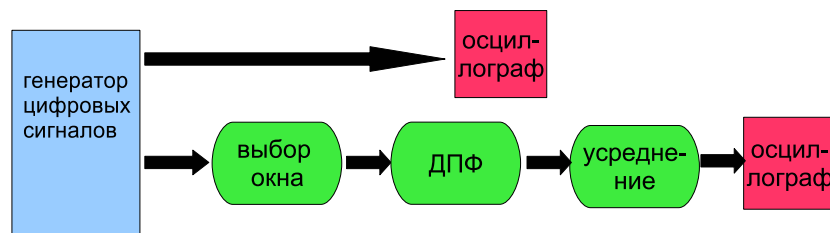


Рис. 2.4: Функциональная схема цифрового анализатора спектров

2.2 Практическая часть

В ходе работы исследуется явление растекания спектра регулярных сигналов, влияние формы временного окна на результаты спектрального анализа, экспериментально проверяется основное соотношение между длительностью сигнала и разрешающей способностью спектра, рассматривается влияние усреднения по ансамблю периодограмм на статистическую устойчивость спектра шумовых сигналов.

2.2.1 Экспериментальная установка

Экспериментальная установка представляет собой компьютерную программу, созданную в среде программирования LabView, которая позволяет моделировать регулярные и шумовые радиосигналы и строить их спектры мощности. Функциональная схема изображена на рис. 2.4 В установку входит генератор сигналов с дискретным временем, позволяющий генерировать двух-тональный гармонический с добавлением шума:

$$x(n) = A_1 \cos(\overline{\omega}_1 n) + A_2 \cos(\overline{\omega}_2 n) + A_3 \xi(n) \quad (2.20)$$

где $A_{1,2}$ - амплитуды гармонических сигналов, $\overline{\omega}_{1,2}$ - их нормированные частоты, $\xi(n)$ - дискретный нормальный шум с интенсивностью A_3 . Из выражения (2.20) видно, что в работе используется смесь двух-тонального сигнала с шумом. Сигнал от генератора подается на цифровой анализатор спектра, состоящий из каскадно соединенных блоков: (а) выбора функции временного окна, позволяющий выбрать одно из трех окон (прямоугольное, треугольное, окно Гаусса); (б) блок расчета ДПФ; блок усреднения выборочных спектров мощности. Число точек ДПФ и число усреднений выбирается пользователем. Форма полученного спектра мощности отображается на осциллографе. На другом осциллографе отображается форма анализируемого сигнала.

На рис.2.5 приведена передняя панель установки. На ней располагаются:

- окно осциллографа для визуализации формы сигнала (Signal Plot), масштаб по оси времени регулируется бегунком (Time scale);

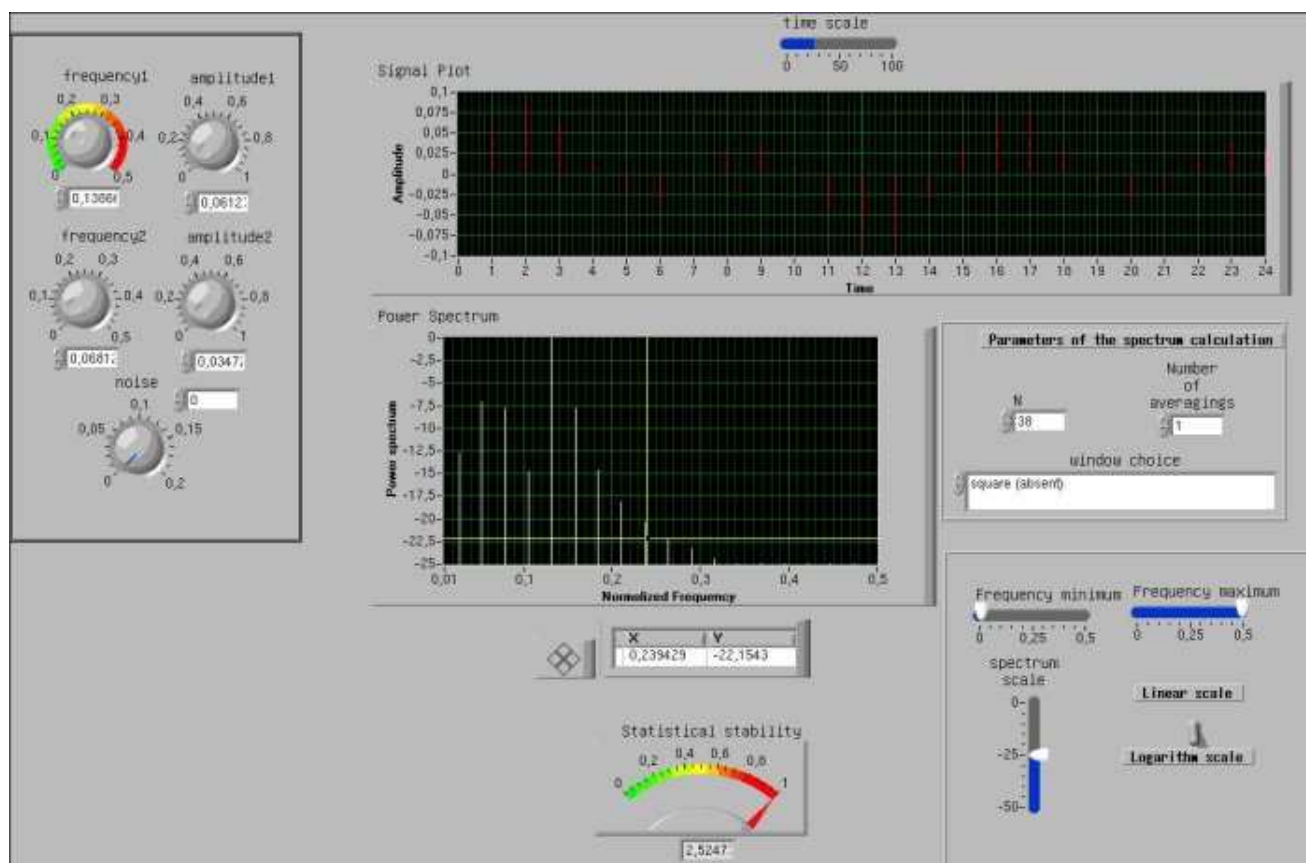


Рис. 2.5: Вид передней панели установки для анализа спектров дискретных сигналов

- окно анализатора спектра, масштаб по оси частот регулируется бегунками (Frequency minimum) и (Frequency maximum), масштаб по оси спектров регулируется бегунком (Spectrum scale), выбор шкалы отображения спектра регулируется переключателем (Linear scale – Logarithm scale);
- окно положения курсора анализатора спектра (X Y);
- окно генератора дискретных сигналов в котором располагаются ручки управления амплитудами гармоник (Amplitude1) и (Amplitude2), ручки управления частотами гармоник (Frequency1) и (Frequency2), ручка управления интенсивностью шума (noise);
- окно выбора параметров расчета спектров, в котором располагается регулятор, задающий число точек ДПФ (N), регулятор, задающий число усреднений при расчете спектра мощности (Number of averagings) и селектор выбора временного окна (Window choice);
- Стрелочный индикатор, отображающий значение статистической устойчивости значения спектра мощности белого шума (Statistical Stability).

2.2.2 Ход работы

1. Исследование разрешающей способности спектра.

- а) Выбрать частоту основного тона \bar{f}_1 , амплитуды обоих сигналов двухтонального генератора - равными друг другу. Число отсчетов $N \simeq 1000$. Менять частоту второго тона \bar{f}_2 , определить минимальную разность частот $\Delta\bar{f} = |\bar{f}_1 - \bar{f}_2|$ при которой оба тона различаются в спектре сигнала (считать, что они различаются, если между ними присутствует хотя бы одна гармоника меньшая по величине). Провести эти измерения при увеличивающемся числе отсчетов N и построить зависимость разрешающей способности анализатора спектра $\Delta\bar{f}$ от N . Построить несколько характерных спектрограмм.
- б) Провести указанные в пункте (а) измерения для смеси сигнала с малым шумом. Построить данные зависимости для разного числа усреднений: $M = 1, M = 10, M = 100$.

2. Исследование явления растекания спектра.

- а) Подать на вход анализатора спектра одно-тональный гармонический сигнал (амплитуду второго тона установить равной нулю). Выбрать амплитуду и частоту сигнала. Менять число отсчетов N следить за изменением формы спектров. Построить несколько характерных спектрограмм. Определить набор значений N , при которых спектр является идеальным

(не содержит дополнительных гармоник). Построить зависимости отношения величины основной гармоники к соседней (в децибелах) от N . Построить график зависимости ширины спектра на уровне -20 дБ от N .

- б) Подать на вход анализатора спектра двух-тональный сигнал. Выбрать амплитуду второго тона малой по сравнению с амплитудой основного. Найти минимальную разность частот, для которой гармонику второго тона можно различить на фоне первого. Провести эти измерения для разных форм временного окна и определить, какое окно лучше для выделения слабых сигналов. Построить характерные спектрограммы.

3. Исследование влияния усреднения на качество спектра мощности случайных сигналов.

- а) Подать на вход анализатора шумовой сигнал. Построить ряд спектрограмм, последовательно увеличивая число усреднений при расчете спектра мощности. Построить зависимость статистической устойчивости от числа усреднений и сравнить с теоретической. Провести измерения для нескольких значений числа отсчетов N . Как статистическая устойчивость зависит от N ?
- б) Выбрать произвольную частоту. Построить для этой частоты $\sim 20 - 30$ значений величины гармоники на выбранной частоте при отсутствии усреднения. Оценить среднее значение и средне-квадратичное отклонение. Провести те же измерения при $M = 10$ и сопоставить результаты.
- с) Подать на вход анализатора спектра смесь одно-тонального гармонического сигнала с шумом. Определить отношение сигнал/шум, как отношение величины основного пика, соответствующего регулярному сигналу к средней величине шумового пьедестала (в дБ). Построить зависимость этого отношения от числа усреднений M .

3 Лабораторная работа: исследование цифровых фильтров

3.1 Краткие теоретические сведения

3.1.1 Введение

Цифровым фильтром принято называть функциональное устройство, преобразующее цифровой сигнал и обладающее частотно-селективными свойствами, то есть подавляющее гармонические составляющие сигнала в одной полосе частот (полоса подавления) и пропускающее гармонические составляющие в другой полосе частот (полоса пропускания). Синтез различных цифровых фильтров - один из основных вопросов цифровой обработки сигналов.

3.1.2 Описание фильтров разностными уравнениями

Цифровой фильтр удобно представлять в виде четырехполюсника то есть устройства, имеющего вход для цифрового сигнала $x(n)$, и выход для преобразованного сигнала $y(n)$. Для описания работы этого четырехполюсника можно использовать разностные уравнения:

$$y(n) = F(y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-M), x(n), x(n-1), \dots, x(n-K)) \quad (3.1)$$

Здесь функция F задает вид преобразования входного сигнала в выходной. В общем случае, значение сигнала в текущий момент времени $y(n)$ может определяться не только текущим значением входного сигнала $x(n)$, но и предыдущими значениями



Рис. 3.1: Цифровой четырехполюсник

входного сигнала $x(n-1)$, $x(n-2)$... вплоть до $x(n-K)$. В этом случае, говорят, что четырехполосник *обладает памятью* длиной K шагов. Кроме того, значение выходного сигнала может зависеть от выходного же сигнала в предыдущие моменты времени $y(n-1)$, $y(n-2)$... вплоть до $y(n-M)$. Такие четырехполосники называют *рекурсивными*. Число M определяет порядок рекурсии. Рекурсивными бывают те четырехполосники, в устройстве которых есть обратные связи, то есть часть выходного сигнала ответвляется и подается обратно на вход. В противоположность рекурсивным четырехполосникам, те четырехполосники, у которых в функции F отсутствуют переменные $y(n-i)$, - называют *нерекурсивными*.

В теории цифровых четырехполосников, также как и в теории аналоговых четырехполосников, важную роль играет свойство *каузальности* (или причинности). Под каузальными понимают такие устройства, сигнал на выходе которых появляется не ранее, чем сигнал на входе. То есть, каузальные четырехполосники должны подчиняться принципу причинности: следствие воздействия не может обгонять свою причину. Уравнение (3.1) удовлетворяет этому свойству, а вот, например, уравнение $y(n) = x(n) + x(n+1)$ - нет. В нем значение выходного сигнала $y(n)$ зависит от входного сигнала в будущий момент времени. Некаузальные четырехполосники не могут быть созданы как технические устройства, однако, уравнения таких четырехполосников могут появляться при анализе тех или иных задач. Если реализация какой-либо операции обработки сигнала требует использования некаузального четырехполосника, это значит, что она невозможна.

Среди всех четырехполосников особое место занимают линейные четырехполосники. Они являются самыми простыми и потому очень часто используются на практике. Линейный четырехполосник описывается линейным разностным уравнением:

$$y(n) + \sum_{i=1}^M a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^K b_i x(n-i) \quad (3.2)$$

где a_i и b_i - постоянные параметры. В дальнейшем мы будем рассматривать только линейные четырехполосники.

3.1.3 Характеристики, описывающие линейные четырехполосники

Свойства линейного четырехполосника могут быть описаны не только посредством разностного уравнения, но и рядом других способов:

1. При помощи импульсной характеристики $h(n)$. *Под импульсной характеристикой четырехполосника понимают его отклик (выходной сигнал) на воздействие (входной сигнал) в виде единичного импульса $\delta(n)$:*

$$x(n) = \delta(n) \quad y(n) = h(n)$$

Импульсная характеристика дает возможность рассчитать отклик системы на заданный входной сигнал:

$$y(n) = x(n) \circ h(n) = \sum_{m=0}^n x(m)h(n-m)$$

- он равен свертке входного сигнала с импульсной характеристикой.

2. При помощи передаточной функции $H(z)$, которая равна отношению z -преобразования выходного и входного сигналов:

$$H(z) = \frac{Z_y(z)}{Z_x(z)}$$

Напомним, что z -преобразование дискретного сигнала проводится по формуле: $Z_x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$. Передаточная функция также дает возможность определить вид выходного сигнала по виду входного воздействия. Правда, для этого необходимо совершить нетривиальную процедуру поиска выходного сигнала $y(n)$ по его Z -изображению.

3. При помощи частотной характеристики $K(\bar{\omega})$. Частотная характеристика определяется как отношение ДВПФ от выходного сигнала к ДВПФ входного:

$$K(\bar{\omega}) = \frac{F_y(\bar{\omega})}{F_x(\bar{\omega})} \quad (3.3)$$

Поскольку функция спектральной плотности $F(\bar{\omega})$ - комплекснозначная, то и частотная характеристика тоже является комплексной функцией частоты. Ее модуль $|K(\bar{\omega})|$ называют коэффициентом передачи по амплитуде или амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ), а аргумент $\arctg(Im(K(\bar{\omega}))/Re(K(\bar{\omega})))$ - коэффициентом передачи по фазе или фазо-частотной характеристикой (ФЧХ). Для практического измерения частотной характеристики формула (3.3) неудобна, поскольку требует предварительного расчета ДВПФ. Поэтому, на практике, в качестве входного воздействия выбирают гармонический сигнал $x(n) = \cos(\bar{\Omega}n)$. При этом, на выходе линейной системы мы получим гармонический сигнал той же частоты, но с другой амплитудой и начальной фазой: $y(n) = A \cos(\bar{\Omega}n + \theta)$. Легко показать, что амплитуда выходного сигнала A совпадает с модулем частотной характеристики на частоте $\bar{\Omega}$, а его фаза - соответственно с фазой частотной характеристики: $K(\bar{\Omega}) = A \exp(j\theta)$. Напомним, что спектральная плотность сигналов с дискретным временем определяется в диапазоне частот от 0 до π (на других частотах она повторяет эти значения). Поэтому и частотная характеристика цифровых четырехполюсников определена в этом же диапазоне частот.

Разные способы описания свойств цифровых четырехполюсников не являются независимыми. Все описанные выше характеристики пересчитываются друг в друга.

Поэтому, достаточно одной из них, чтобы описать свойства линейного четырехполюсника, остальные получаются из нее при помощи достаточно простых выражений. Напомним некоторые из них:

- Если известен вид разностного уравнения (3.2), то легко получить вид передаточной функции. Для этого нужно просто вспомнить, что z -преобразованию от сигнала, сдвинутого по времени на k шагов соответствует z -изображение исходного сигнала, домноженное на z^{-k} . Тогда, переходя в формуле (3.2) от сигналов к их z -образам, получаем:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^K b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^M a_i z^{-i}} \quad (3.4)$$

- Если известен вид импульсной характеристики, то несложно рассчитать передаточную функцию. Действительно, поскольку z -изображение для входного сигнала в виде единичного импульса равно единице, передаточная функция есть z -преобразование от импульсной характеристики:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} \quad (3.5)$$

- Частотная и передаточная характеристики легко преобразуются друг в друга при помощи замены переменных $z \leftrightarrow \exp(j\bar{\omega})$:

$$K(\bar{\omega}) = H(\exp(j\bar{\omega})) \quad (3.6)$$

$$H(z) = K(-j \ln(z)) \quad (3.7)$$

- Импульсная характеристика связана с частотной через интегральное преобразование Фурье:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(\bar{\omega}) \exp(j\bar{\omega}n) d\bar{\omega} \quad (3.8)$$

3.1.4 Импульсная характеристика каузального фильтра

Как уже было сказано выше, реализованы на практике могут быть только фильтры, удовлетворяющие принципу причинности, то есть каузальные фильтры. Легко показать, что импульсная характеристика каузального фильтра не может иметь ненулевых слагаемых для отрицательных значений аргумента. Действительно, входным сигналом, при определении импульсной характеристики, является единичный импульс $\delta(n)$, который действует лишь в момент времени равный нулю. Поэтому и отклик на это воздействие, которым и является импульсная характеристика, не может иметь ненулевые значения для более ранних моментов времени:

$$h(n) \equiv 0 \text{ если } n < 0 \quad (3.9)$$

3.1.5 КИХ и БИХ фильтры

Цифровые фильтры принято делить на фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ) и фильтры с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ). В первом случае импульсная характеристика отлична от нуля лишь на конечном интервале времени:

$$h(n) \begin{cases} \neq 0 & \text{если } n \in [0 : N] \\ \equiv 0 & \text{если } n \notin [0 : N] \end{cases}$$

Соответственно, для БИХ фильтров импульсная характеристика имеет отличные от нуля значения для сколь угодно больших значений n . Легко показать, что нерекурсивные фильтры всегда имеют конечную импульсную характеристику. Действительно, пусть нерекурсивный фильтр задается разностным уравнением:

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i)$$

Возьмем в качестве входного воздействия δ -импульс ($x(n) = \delta(n)$). Тогда: $h(n) = b_0\delta(n) + b_1\delta(n-1) + \dots + b_M\delta(n-M)$. При подстановке $n = 0, 1, 2, \dots, M, \dots$, получаем: $h(0) = b_0$, $h(1) = b_1, \dots$, $h(M) = b_M$, $h(n > M) \equiv 0$. Таким образом:

- нерекурсивные фильтры всегда КИХ - фильтры;
- интервал времени в течение которого импульсная характеристика ненулевая совпадает с порядком фильтра (порядком разностного уравнения);
- значения импульсной характеристики совпадают с коэффициентами разностного уравнения.

Для рекурсивных фильтров вышеперечисленные свойства не выполняются. Они могут иметь как бесконечную импульсную характеристику (как правило), так и конечную импульсную характеристику (при специальном выборе коэффициентов).

3.1.6 Классификация фильтров по их частотным свойствам

Основная задача фильтров - отфильтровывать (подавлять) спектральные компоненты сигнала в определенном частотном диапазоне, передавая в неизменном виде спектральные компоненты в другом частотном диапазоне. Поэтому основной характеристикой фильтра является его частотная характеристика. Фильтры классифицируются в зависимости от вида их амплитудно-частотной характеристики. Диапазон частот АЧХ, в котором фильтр пропускает спектральные компоненты сигнала, называется полосой пропускания. Диапазон частот АЧХ, в котором фильтр не пропускает (подавляет) спектральные компоненты сигнала, называется полосой подавления. Между полосами пропускания и подавления может располагаться т.н. переходная полоса. В зависимости от расположения на оси частот полосы пропускания и полосы подавления фильтры делятся на:

- фильтры нижних частот (ФНЧ), у которых полоса пропускания - интервал от нулевой частоты до некоторой граничной частоты $\overline{\omega}_{01}$, а полоса подавления - интервал от граничной частоты $\overline{\omega}_{02} \geq \overline{\omega}_{01}$ до π ;
- фильтры верхних частот (ФВЧ), у которых полоса подавления - интервал от нулевой частоты до некоторой граничной частоты $\overline{\omega}_{01}$, а полоса пропускания - интервал от граничной частоты $\overline{\omega}_{02} \geq \overline{\omega}_{01}$ до π ;
- полосовые фильтры (ПФ), у которых полоса пропускания имеет как верхнюю, так и нижнюю граничные частоты, то есть располагается в полосе между $\overline{\omega}_{01}$ и $\overline{\omega}_{02}$, а полоса подавления разбивается на два под-интервала: нижний, от нулевой частоты до $\overline{\omega}_{03} \leq \overline{\omega}_{01}$, и верхний, от $\overline{\omega}_{04} \geq \overline{\omega}_{02}$ до π ;
- заграждающие фильтры (ЗФ), у которых полоса подавления имеет как верхнюю, так и нижнюю граничные частоты, то есть располагается в полосе между $\overline{\omega}_{01}$ и $\overline{\omega}_{02}$, а полоса пропускания разбивается на два под-интервала: нижний, от нулевой частоты до $\overline{\omega}_{03} \leq \overline{\omega}_{01}$, и верхний, от $\overline{\omega}_{04} \geq \overline{\omega}_{02}$ до π .

Качественный вид АЧХ для ФНЧ, ФВЧ, ПФ и ЗФ показан на рис. а, б, с и d соответственно.

3.1.7 Понятие об идеальных фильтрах

Идеальными называются фильтры:

1. у которых отсутствует переходная полоса, то есть весь частотный диапазон делится только на полосу пропускания и полосу подавления;
2. если спектр входного сигнала целиком укладывается в полосу подавления, то такой сигнал полностью подавляется;
3. если спектр входного сигнала целиком укладывается в полосу пропускания, тот такой сигнал передается без искажения формы.

Свойство (2) означает, что в полосе подавления амплитудно-частотная характеристика должна быть равна нулю, фазо-частотная характеристика, при этом, может быть любой. Если обозначить диапазон частот, соответствующий полосе подавления как $\Delta\overline{\omega}_s$, то данное свойство можно записать следующим образом:

$$K(\overline{\omega}) = 0, \quad \text{если } \overline{\omega} \in \Delta\overline{\omega}_s \quad (3.10)$$

Рассмотрим подробнее свойство (3). Обозначим диапазон частот, соответствующий полосе пропускания как $\Delta\overline{\omega}_t$ и определим вид $K(\overline{\omega})$ в этом диапазоне. Если сигнал $x(n)$ таков, что $F_x(\overline{\omega}) = 0$ для $\overline{\omega} \notin \Delta\overline{\omega}_t$, тогда форма выходного сигнала $y(n)$ должна полностью повторять форму $x(n)$. Это не значит, что входной и выходной сигналы должны быть идентичными, а означает лишь, что выходной сигнал может

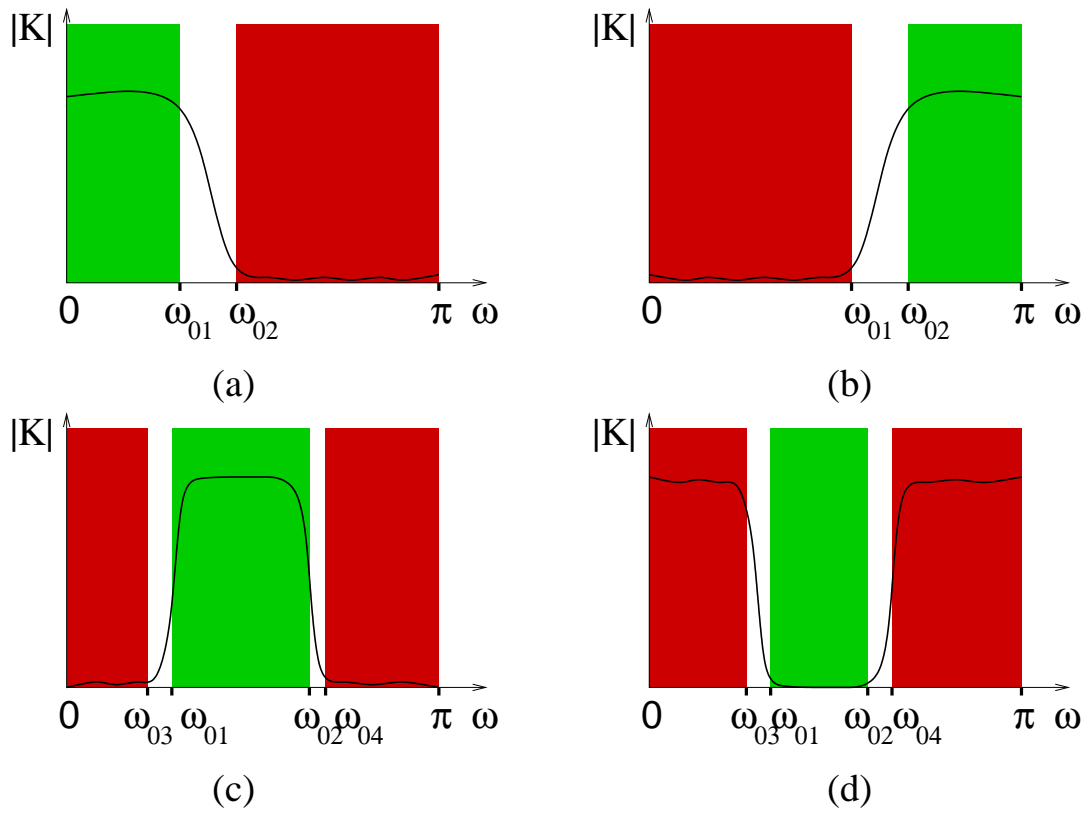


Рис. 3.2: Вид амплитудно-частотной характеристики для: (а) фильтра нижних частот, (b) фильтра верхних частот; (с) полосового и (d) заграждающего фильтров. Полоса пропускания окрашена зеленым цветом, полоса подавления - красным, переходная полоса оставлена белой.

отличаться от входного (а) амплитудой и (б) начальной фазой. Иными словами $y(n) = Ax(n - n_0)$, где n_0 - задержка выходного сигнала относительно входного. Тогда, учитывая свойства ДВПФ, можно записать, что

$$F_y(\bar{\omega}) = AF_x(\bar{\omega}) \exp(-jn_0\bar{\omega})$$

Отсюда, для идеального фильтра

$$K(\bar{\omega}) = A \exp(-jn_0\bar{\omega}), \quad \text{если } \bar{\omega} \in \Delta\bar{\omega}_t \quad (3.11)$$

или, для АЧХ:

$$|K(\bar{\omega})| = A, \quad \text{если } \bar{\omega} \in \Delta\bar{\omega}_t$$

для ФЧХ:

$$\theta(\bar{\omega}) = -n_0\bar{\omega}, \quad \text{если } \bar{\omega} \in \Delta\bar{\omega}_t$$

Таким образом, мы выяснили, что в полосе подавления коэффициент передачи тождественно равен нулю, а в полосе пропускания он имеет постоянную амплитуду (модуль) и линейно зависящую от времени фазу. Вид АЧХ и ФЧХ для идеального фильтра нижних частот приведен на рис. 3.3.

Возможна ли реализация идеального фильтра? Нетрудно показать, что идеальный фильтр должен быть некаузальным, а значит его нельзя создать. Действительно, рассмотрим, например, идеальный фильтр нижних частот, частотная характеристика которого изображена на рис. 3.3. Эта характеристика задается выражением:

$$K(\bar{\omega}) = \begin{cases} A \exp(-jn_0\bar{\omega}) & \text{если } \bar{\omega} \in [-\bar{\omega}_{01} : \bar{\omega}_{01}] \\ 0 & \text{если } \bar{\omega} \notin [-\bar{\omega}_{01} : \bar{\omega}_{01}] \end{cases}$$

Рассчитаем для него импульсную характеристику:

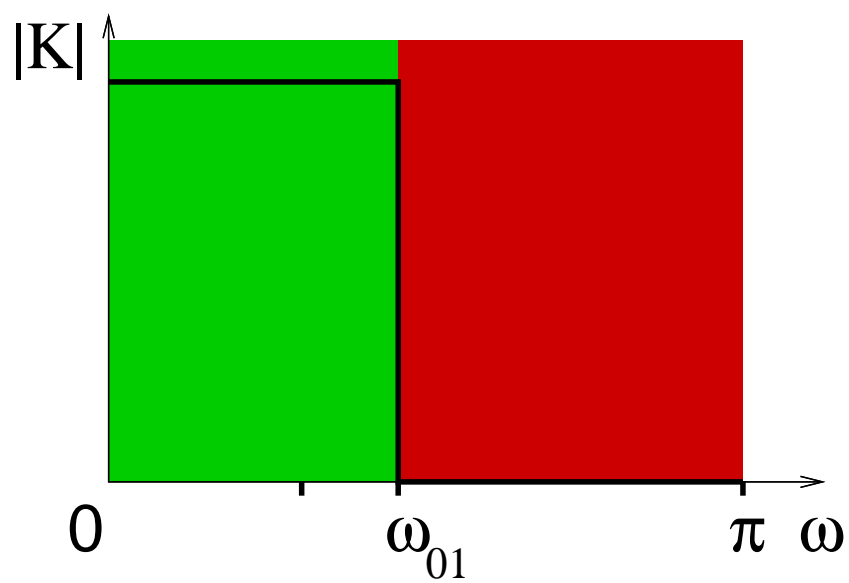
$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\bar{\omega}_{01}}^{\bar{\omega}_{01}} A \exp(-jn_0\bar{\omega}) d\bar{\omega} \right] = \frac{A\bar{\omega}_{01}}{\pi} \text{Sinc}[(n - n_0)\bar{\omega}_{01}] \quad (3.12)$$

Из формулы (3.12) видно, что $h(n)$ имеет ненулевые слагаемые для любых значений n , включая отрицательные. Это означает, что идеальный фильтр нижних частот является некаузальным, то есть неосуществимым на практике. Аналогичные свойства можно доказать и для других идеальных фильтров.

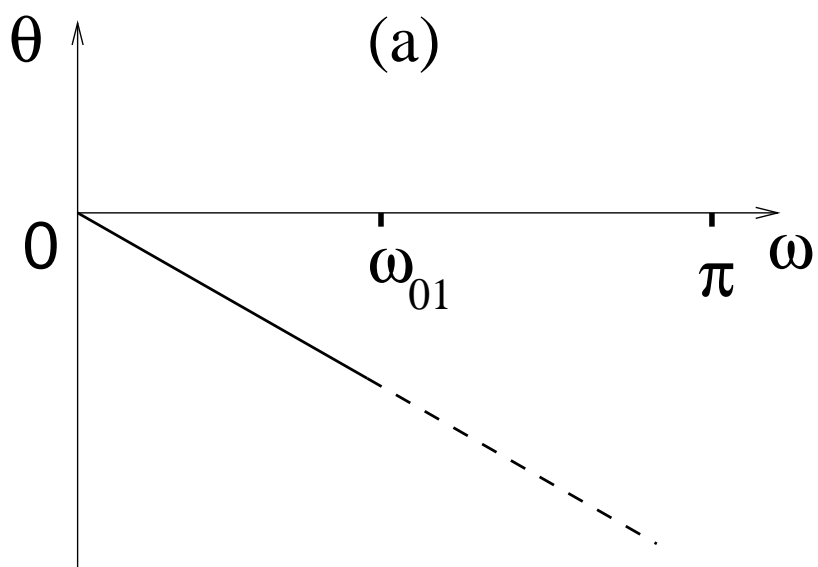
Итак, идеальные фильтры неосуществимы. Возникает вопрос: для чего необходимо использовать модель идеального фильтра, который нельзя реализовать на практике? Дело в том, что характеристика идеального фильтра не может соответствовать никакому устройству, однако, можно создать фильтры с характеристиками, которые будут очень близки к характеристике идеального фильтра.

3.1.8 Фильтры с линейной ФЧХ

Комплексная частотная характеристика идеального фильтра соответствует ступенчатой АЧХ и линейной ФЧХ. В предыдущем разделе была показана неосуществимость этой комбинации. Могут ли идеальная АЧХ и идеальная ФЧХ быть реализованы по-отдельности? Иными словами, можно ли создать фильтр со ступенчатой



(a)



(b)

Рис. 3.3: Амплитудно-частотная (a) и фазо-частотная (b) характеристика идеального фильтра нижней частоты

АЧХ, ФЧХ которого не является линейной функцией частоты, и, наоборот, можно ли создать фильтр с линейной ФЧХ, АЧХ которого не идеальна? Ответ на первый из этих вопросов отрицателен. Нельзя создать идеальную АЧХ, но можно создать фильтр, АЧХ которого будет сколь угодно близка к идеальной. Ответ на второй вопрос положителен, но только если фильтр имеет конечную импульсную характеристику. КИХ фильтры с линейной ФЧХ существуют и их синтез не представляет особых трудностей. Определим те условия, которым должен удовлетворять КИХ фильтр, чтобы его ФЧХ была линейной.

Пусть КИХ фильтр задается уравнением:

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i)$$

тогда его передаточная характеристика $H(z)$ будет иметь вид:

$$H(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} \quad (3.13)$$

Соответственно, чтобы получить частотную характеристику надо заменить в выражении (3.13) переменную z на $\exp(j\bar{\omega})$:

$$K(\bar{\omega}) = \sum_{i=0}^M b_i \exp(-ji\bar{\omega}) \quad (3.14)$$

Предположим, что $M = 2k$ - четное число. Тогда в сумме (3.14) будет нечетное число $(2k+1)$ слагаемых. Вынесем общий множитель $\exp(-jk\bar{\omega})$ и сгруппируем члены суммы:

$$K(\bar{\omega}) = [\{b_0 \exp(jk\bar{\omega}) + b_{2k} \exp(-jk\bar{\omega})\} + \{b_1 \exp(j(k-1)\bar{\omega}) + b_{2k-1} \exp(-j(k-1)\bar{\omega})\} + \dots + \{b_{k-1} \exp(j\bar{\omega}) + b_{k+1} \exp(-j\bar{\omega})\} + b_k] \exp(-jk\bar{\omega}) \quad (3.15)$$

Из выражения (3.15) видно, для того чтобы ФЧХ была линейной, достаточно, чтобы сумма в квадратных скобках была вещественной: $K(\bar{\omega}) = D(\bar{\omega}) \exp(-jk\bar{\omega})$, где D - вещественнозначная функция. Для того, чтобы функцию $D(\bar{\omega})$ сделать вещественной достаточно выбрать коэффициенты b_i симметричными:

$$b_0 = b_{2k}, b_1 = b_{2k-1}, \dots, b_{k-1} = b_{k+1} \quad (3.16)$$

Тогда:

$$D(\bar{\omega}) = 2[b_0 \cos(k\bar{\omega}) + b_1 \cos((k-1)\bar{\omega}) + \dots + b_{k-1} \cos(\bar{\omega}) + b_k/2], \quad (3.17)$$

или, обозначая $c_0 = b_k$, $c_1 = 2b_{k-1}, \dots$, $c_k = 2b_0$, получаем:

$$D(\bar{\omega}) = \sum_{i=0}^k c_i \cos(i\bar{\omega}) \quad (3.18)$$

Рассмотрим свойства данного фильтра. Для того чтобы получить АЧХ, нужно взять модуль от $D(\bar{\omega})$:

$$|K(\bar{\omega})| = \left| \sum_{i=0}^k c_i \cos(i\bar{\omega}) \right| \quad (3.19)$$

На нулевой частоте $|K(\bar{\omega})| = \left| \sum_{i=0}^k c_i \right|$, на верхней частоте $|K(\bar{\omega})| = \left| \sum_{i=0}^k c_i (-1)^i \right|$ для обоих случаев вполне возможно подобрать соответствующие коэффициенты c_k , а значит, фильтр с симметричным выбором коэффициентов может быть как фильтром как нижних, так и верхних частот. Рассмотрим теперь подробнее свойства ФЧХ. В полосе пропускания фильтра, там где $|K(\bar{\omega})| = D(\bar{\omega})$ фазо-частотная характеристика будет линейной:

$$\theta(\bar{\omega}) = -k\bar{\omega},$$

Такая ФЧХ будет соответствовать задержке выходного сигнала относительно входного на k шагов. Такая задержка называется *групповой задержкой* фильтра. В полосе подавления $|K(\bar{\omega})| \ll 1$, а значит в ряде точек при переходе через ноль $D(\bar{\omega})$ может менять знак. Каждая смена знака функцией $D(\bar{\omega})$ соответствует изменению фазы на π , поэтому в этом диапазоне ФЧХ будет линейна за исключением тех значений частоты, в которых АЧХ обращается в ноль. В этих точках наблюдаются скачки фазы на π . Возможный вид АЧХ, ФЧХ и функции $D(\bar{\omega})$ КИХ-фильтра нижних частот с симметричным выбором коэффициентов приведен на рис.3.4. Итак, мы определили, что при определенных условиях КИХ фильтр может иметь ФЧХ, линейную в полосе пропускания и кусочно-линейную в полосе подавления. Нелинейность ФЧХ в полосе подавления не является существенной, так как в этом частотном диапазоне коэффициент передачи фильтра все равно близок к нулю и фазовые свойства больше не играют роли. Чтобы сформировать нужную АЧХ, коэффициенты b_i должны быть подобраны соответствующим образом. Задача подбора этих коэффициентов называется задачей синтеза КИХ-фильтра. В данной работе она не рассматривается.

Что касается БИХ-фильтров, то, как указывается в ряде учебников по обработке сигналов, их ФЧХ является нелинейной. На самом деле это не совсем так. Коэффициент передачи БИХ-фильтра имеет следующий вид:

$$K(\bar{\omega}) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i \exp(-ji\bar{\omega})}{1 - \sum_{i=1}^N a_i \exp(-ji\bar{\omega})}$$

Выбирая M и N четными и проведя аналогичные выкладки можно вынести фазовые множители числителя и знаменателя и симметричным выбором коэффициентов сделать оставшуюся часть вещественной:

$$\begin{aligned} K(\bar{\omega}) &= \frac{\exp(-jk\bar{\omega})}{\exp(-jl\bar{\omega})} \frac{b_0 \cos(k\bar{\omega}) + b_1 \cos((k-1)\bar{\omega}) + \dots + b_{k-1} \cos(\bar{\omega}) + b_k/2}{\cos(k\bar{\omega}) - a_1 \cos((k-1)\bar{\omega}) - \dots - a_{l-1} \cos(\bar{\omega}) + a_l/2} = \\ &= \exp(-j(k-l)\bar{\omega}) D(\bar{\omega}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

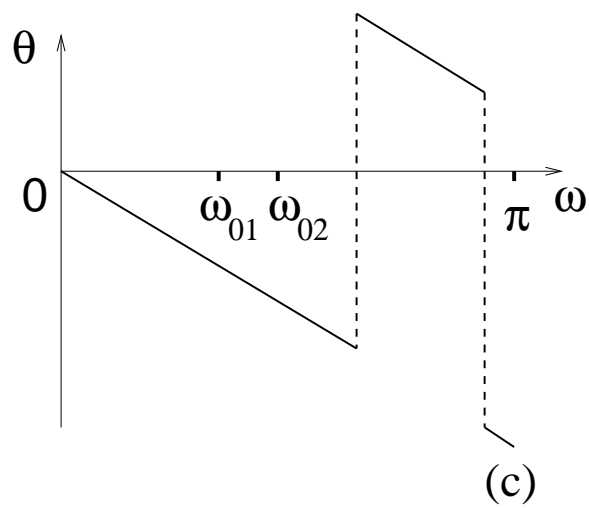
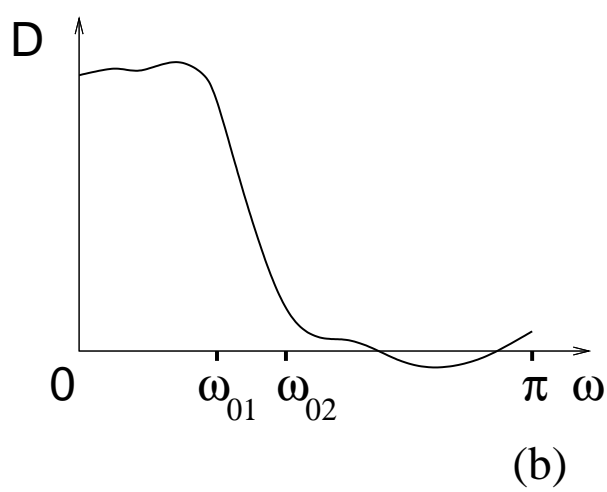
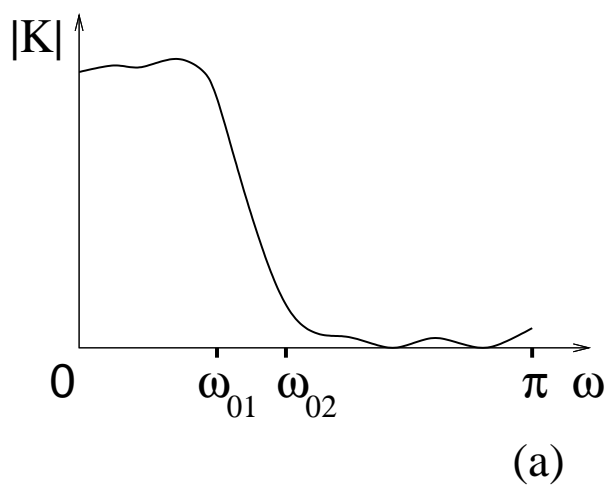


Рис. 3.4: Вид АЧХ (а), функции $D(\omega)$ (b) и ФЧХ для КИХ фильтра нижних частот с симметричным выбором коэффициентов

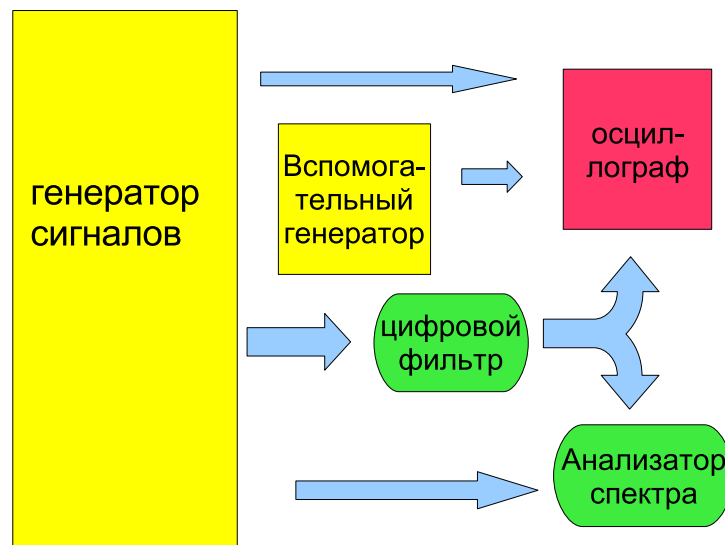


Рис. 3.5: Функциональная схема установки для исследования цифровых фильтров

Однако, на практике фильтры с характеристикой (3.20) не используются в силу их громоздкости и отсутствия преимуществ по сравнению с КИХ-фильтрами. Используемые на практике БИХ-фильтры обладают нелинейной ФЧХ.

3.2 Практическая часть

В ходе экспериментальных исследований определяются характеристики фильтров (АЧХ, ФЧХ, импульсная характеристика), тип фильтра, выясняется к какому классу (КИХ или БИХ) он относится. Рассматривается прохождение регулярных и шумовых сигналов через фильтры.

3.2.1 Экспериментальная установка

Экспериментальная установка представляет собой компьютерную программу, созданную в среде программирования LabView, которая позволяет моделировать регулярные и шумовые радиосигналы, проводить их фильтрацию при помощи выбранного цифрового фильтра, строить спектры мощности исходного и прошедшего через фильтр сигналов, отображать сами сигналы на осциллографе. Функциональная схема изображена на рис. 3.5 В установку входит генератор сигналов, позволяющий генерировать дискретные регулярные колебания различной формы:

- гармонический сигнал,

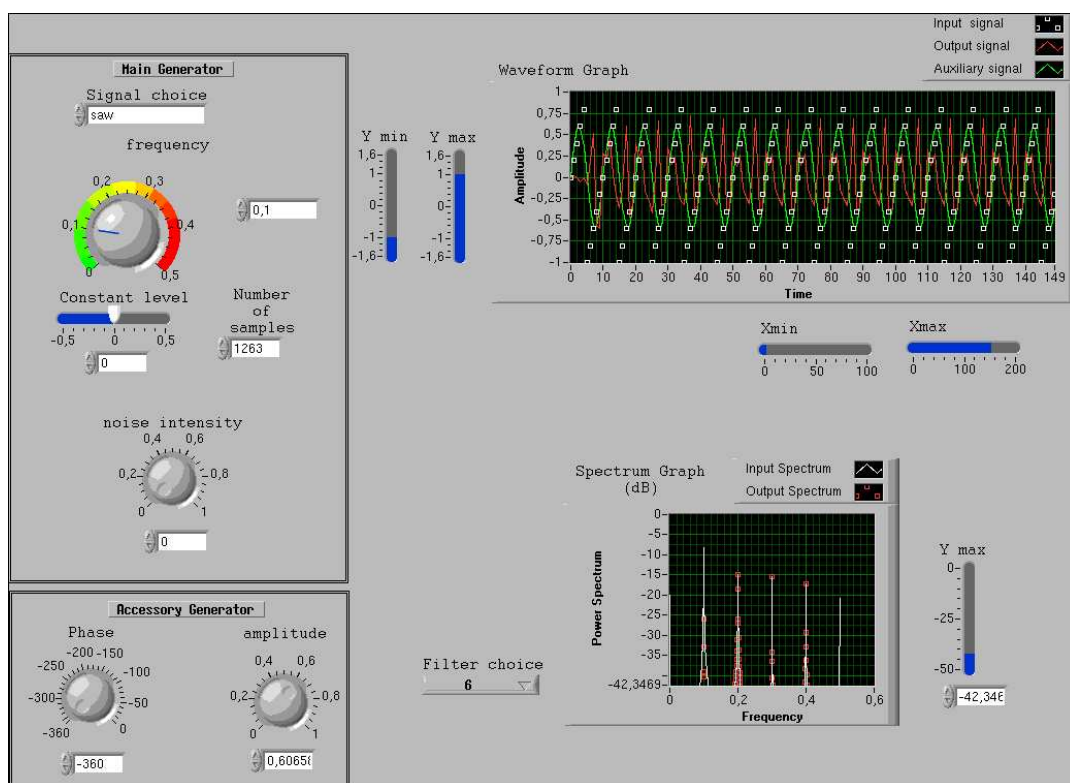


Рис. 3.6: Вид передней панели установки для исследования цифровых фильтров

- периодическая последовательность прямоугольных импульсов,
- периодическая последовательность треугольных импульсов,
- периодическая последовательность пилообразных импульсов,
- единичный импульс $\delta(n)$;

а также белый шум с равномерным распределением и регулируемой интенсивностью; вспомогательный генератор гармонических колебаний с регулируемой амплитудой и начальной фазой, частота колебаний которого “привязана” к частоте основного генератора; исследуемый цифровой фильтр, осциллограф и анализатор спектра. Спектры обоих сигналов (исходного и прошедшего через фильтр) рассчитывается посредством алгоритма ДПФ и отображается на экране анализатора спектра. Форма сигналов отображается на экранах осциллографа.

На рис.3.6 приведена передняя панель установки. На ней располагаются:

1. **Основной генератор (Main Generator)** - который формирует четыре формы сигнала и добавляет к ним шумовой сигнал. Он содержит следующие элементы управления:

- a) **Signal choice** – переключатель формы выходного сигнала. Нажатием на кнопку форма сигнала изменяется в последовательности: импульс – синус – прямоугольник – треугольник – пилообразный сигнал.
 - b) **Frequency** – регулятор нормированной частоты в диапазоне от 0 до 0.5.
 - c) **Number of samples** – регулятор числа точек генерируемого сигнала (длительность генерируемой последовательности).
 - d) **Constant level** – регулятор уровня постоянной составляющей сигнала.
 - e) **Noise intensity** – регулятор интенсивности шумового сигнала.
2. **Вспомогательный генератор (Accessory generator)** - генерирует вспомогательный гармонический сигнал.
- a) Ручка **Phase** - задает начальную фазу сигнала.
 - b) Ручка **Amplitude** - задает амплитуду сигнала.
3. **Filter choice** - блок выбора исследуемого фильтра.
4. **Осциллограф** строит графики исходного сигнала, сигнала, прошедшего через фильтр, сигнала вспомогательного генератора.
5. **Анализатор спектра** строит спектры исходного и отфильтрованного сигналов.
6. **Осциллограф 3** строит форму мгновенной фазы. Все три осциллографа снабжены ручками регулировки масштабов по вертикали, блок курсоров, имеют единый регулятор масштаба по горизонтали.

3.2.2 Ход работы

1. Определение характеристик фильтра.
 - a) Постройте импульсную характеристику выбранных фильтров. Для этого подайте на вход фильтра сигнал в виде одиночного δ -импульса (длительность сигнала должна быть достаточно большой). Выходной сигнал будет представлять собой импульсную характеристику. Определите к какому классу (КИХ или БИХ) относится выбранный фильтр. Для КИХ фильтра определите его порядок – максимальный интервал времени, на котором импульсная характеристика остается ненулевой, а также групповую задержку фильтра.
 - b) Постройте АЧХ фильтра. Подайте на вход фильтра гармонический сигнал. Меняя частоту входного сигнала, измеряйте амплитуду выходного сигнала. Зависимость данной амплитуды от частоты и будет представлять собой искомую АЧХ (поскольку амплитуда входного сигнала равна

единице). Для более точного определения амплитуды выходного сигнала используйте вспомогательный генератор: ручкой регулировки амплитуды подберите амплитуду сигнала вспомогательного генератора равной амплитуде выходного сигнала, тогда показание дисплея ручки регулировки амплитуды и будут представлять собой искомую амплитуду отфильтрованного сигнала.

- с) Постройте ФЧХ фильтра. Подайте на вход фильтра гармонический сигнал. Меняя частоту входного сигнала, измеряйте начальную фазу выходного сигнала по отношению к фазе входного. Зависимость начальной фазы от частоты и будет представлять собой искомую ФЧХ (поскольку начальная фаза входного сигнала равна нулю). Для более точного определения начальной фазы выходного сигнала используйте вспомогательный генератор: ручкой регулировки фазы установите начальную фазу сигнала вспомогательного генератора равной фазе выходного сигнала, тогда показание дисплея ручки регулировки фазы и будут представлять собой искомую фазу отфильтрованного сигнала.
 - д) Получите на анализаторе спектра амплитудный спектр импульсной характеристики и сопоставьте его с построенной АЧХ фильтра.
2. Исследование прохождения регулярных сигналов через цифровой фильтр. Проведите исследование прохождения сигналов разной формы через выбранный цифровой фильтр. Постройте несколько характерных осциллограмм и спектров мощности.
3. Исследование прохождения шумового сигнала через цифровой фильтр. Проведите исследование прохождения шумового сигнала через разные цифровые фильтры. Для этого выберите в качестве входного сигнала сумму одиночного импульса и шума. Постройте несколько характерных осциллограмм и спектров мощности. Проиллюстрируйте сглаживающие свойства некоторых фильтров.

4 Лабораторная работа:

Исследование цифрового фильтра Гильберта

4.1 Краткие теоретические сведения

4.1.1 Введение

Кроме обычных цифровых фильтров, являющихся частотно-селективными устройствами существует класс фильтров, называемых специальными фильтрами. Специальные фильтры осуществляют некоторое преобразование над цифровым сигналом, которое выходит за рамки подавления составляющих спектра в определенном частотном диапазоне. Одним из таких преобразований, имеющих важное значение в радиотехнике, является преобразование Гильберта. Фильтр, осуществляющий преобразование Гильберта цифрового сигнала и называется цифровым фильтром Гильберта.

4.1.2 Преобразование Гильберта и его свойства

Преобразованием Гильберта (ПГ) аналогового сигнала $x(t)$ называется линейное преобразование вида:

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\xi)}{t - \xi} d\xi \quad (4.1)$$

Получившийся сигнал $\tilde{x}(t)$ называют сопряженным сигналом. Из формулы (4.1) видно, что ПГ некаузально, так как значение сопряженного сигнала в текущий момент времени зависит как от прошлых, так и от будущих значений исходного сигнала $x(t)$. Это свойство чрезвычайно важно, поскольку из-за него преобразование Гильберта не может быть выполнено каким-либо физическим прибором - то есть является нереализуемым на практике. В чем же смысл этой физически нереализуемой процедуры и откуда возник интерес к ней в радиофизике и радиотехнике?

Чтобы ответить на этот вопрос посмотрим на (4.1) со спектральной точки зрения. Присмотревшись к формуле (4.1), можно увидеть, что с точностью до постоянного множителя $1/\pi$ ПГ представляет собой свертку сигнала с функцией $1/t$, а значит, что преобразование Фурье от сопряженного сигнала будет равно произведению преобразования Фурье от этих сигналов:

$$F_{\tilde{x}}(\omega) = \frac{1}{\pi} F_x(\omega) F_{1/t}(\omega)$$

Поскольку $F_{1/t}(\omega) = -j\pi \text{Sgn}(\omega)$ (Sgn - функция знака), то окончательно получаем:

$$F_{\tilde{x}}(\omega) = -j\text{Sgn}(\omega)F_x(\omega)$$

Таким образом, преобразование Гильберта можно рассматривать, как гипотетическое линейное устройство (четырёхполюсник), АЧХ которого постоянна: $|K(\omega)| = 1$, а ФЧХ представляет кусочно-постоянную функцию:

$$\theta(\omega) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{при } \omega > 0 \\ \pi/2 & \text{при } \omega < 0 \end{cases}$$

Если на вход фильтра Гильберта подать гармонический сигнал любой частоты $x(t) = A \cos(\omega_0 t)$, то на выходе будет сигнал той же частоты и амплитуды, но сдвинутый по фазе на 90 градусов $\tilde{x}(t) = A \sin(\omega_0 t)$. Объединив два вещественных сигнала в один комплексный: $X(t) = x(t) + j\tilde{x}(t) = A \exp(j\omega_0 t)$, который принято называть комплексным гармоническим сигналом. Комплексный гармонический сигнал является базовым сигналом при исследовании линейных радиосцеп с использованием *символического метода*, который позволяет описывать процессы в конденсаторе и катушки индуктивности при помощи одного параметра - импеданса. Модуль комплексного гармонического сигнала совпадает с амплитудой, а аргумент - с фазой исходного гармонического сигнала.

Если теперь на вход ПГ подать произвольный сигнал $x(t)$, то сопряженный сигнал $\tilde{x}(t)$ будет содержать те же гармонические составляющие, но сдвинутые на 90 градусов. Легко увидеть, что в спектре комплексного сигнала, составленного из $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$: $X(t) = x(t) + j\tilde{x}(t)$ будет содержаться только положительные частоты (все компоненты спектра на отрицательных частотах равны нулю). Такой комплексный сигнал называют *аналитическим*. Рассмотренный выше комплексный гармонический сигнал - простейший вид аналитического сигнала. Для чего используют аналитический сигнал? Из его рассмотрения можно получить информацию о *мгновенной амплитуде* и *мгновенной фазе* исходного сигнала.

4.1.3 Использование ПГ для выделения амплитуды и фазы сигнала

Амплитуда и фаза - характеристики гармонических колебаний: если $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, то A - амплитуда, $\psi(t) = \omega t + \phi$ - фаза. Амплитуда характеризует интенсивность (размах) колебаний, а фаза - текущее состояние гармонического колебательного процесса. Например, если $\psi = 0$, то сигнал в данный момент времени принимает свое максимальное значение, $\psi = \pi/2$ - равен нулю, $\psi = \pi$ - принимает минимальное из возможных значений. Одновременное задание амплитуды и фазы полностью характеризует значение сигнала в данный момент времени. Понятие амплитуды и фазы в строгом смысле применимо только к гармоническим сигналам. Однако, на практике их используют для значительно более широкого класса сигналов, таких, например, как модулированные сигналы, которые используются для передачи информации.

Рассмотрим амплитудно-модулированные (АМ) колебания: $x(t) = A(t) \cos(\omega t + \phi)$, $A(t)$ - амплитуда, меняющаяся со временем - мгновенная амплитуда. Обычно считается, что $A(t)$ - более медленная функция, чем $\cos(\omega t + \phi)$. АМ сигнал также записывают в форме: $x(t) = A_0 [1 + m\zeta(t)] \cos(\omega_0 t + \phi)$, где m - коэффициент модуляции, $\zeta(t)$ - модулирующий сигнал (огибающая). Если АМ колебания используют в линиях связи, то модулирующий сигнал содержит передаваемую информацию. Как извлечь его из $x(t)$? Для этого можно использовать ПГ.

Простейший случай АМ сигнала - одно-тональный АМ сигнал, когда модулирующий сигнал представляет собой гармоническое колебание $\zeta(t) = \cos(\Omega t)$. Тогда сам сигнал может быть представлен в виде трех гармонических составляющих:

$$x(t) = A_0 \left\{ \cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{m}{2} \cos([\omega_0 + \Omega]t + \phi) + \frac{m}{2} \cos([\omega_0 - \Omega]t + \phi) \right\}$$

Сопряженный сигнал получится, если заменить косинусы на синусы:

$$\tilde{x}(t) = A_0 \left\{ \sin(\omega_0 t + \phi) + \frac{m}{2} \sin([\omega_0 + \Omega]t + \phi) + \frac{m}{2} \sin([\omega_0 - \Omega]t + \phi) \right\}$$

и соответственно, аналитический сигнал:

$$X(t) = A_0 \left\{ \exp(j(\omega_0 t + \phi)) + \frac{m}{2} \exp(j([\omega_0 + \Omega]t + \phi)) + \frac{m}{2} \exp(j([\omega_0 - \Omega]t + \phi)) \right\} \quad (4.2)$$

Выражение (4.2) преобразуется к виду:

$$X(t) = A_0 \{1 + m \cos(\Omega t)\} \exp(j(\omega_0 t + \phi))$$

откуда видно, что модуль аналитического сигнала совпадает с огибающей исходных АМ колебаний:

$$|X(t)| = A_0 \{1 + m \cos(\Omega t)\}$$

Аналогичным образом можно показать, что ПГ дает возможность получить огибающую любых АМ колебаний. В этом случае огибающая $\zeta(t)$ раскладывается по своим гармоническим составляющим $F_\zeta(\omega)$: $\zeta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_\zeta(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$. Спектр модулированных колебаний представляет собой сумму несущей частоты и боковых полос:

$$F_x^+ = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{m}{2}F_\zeta(\omega - \omega_0)$$

Здесь F_x^+ означает ту часть спектра, которая приходится на положительные частоты. Соответственно, положительная часть спектра сопряженного сигнала получится, если F_x^+ домножить на $-j$:

$$F_{\tilde{x}}^+ = -j \left\{ \pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{m}{2}F_\zeta(\omega - \omega_0) \right\}$$

и соответственно, спектр аналитического сигнала $X = x + j\tilde{x}$:

$$F_X = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) + mF_\zeta(\omega - \omega_0) \quad (4.3)$$

(напомним, что отрицательная часть спектра аналитического сигнала равна нулю, поэтому знак “+” над F_X не ставится. Чтобы выразить сигнал, через его спектр, надо воспользоваться обратным преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{2\pi\delta(\omega - \omega_0) + mF_{\zeta}(\omega - \omega_0)\} \exp(j\omega t) d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) \exp(j\omega t) d\omega + \frac{m}{2\pi} \exp(j\omega_0 t) \int_{-\infty}^{\infty} F_{\zeta}(\omega - \omega_0) \exp(j(\omega - \omega_0)t) d(\omega - \omega_0) = \\ &= \exp(j\omega_0 t) + \exp(j\omega_0 t) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\zeta}(\xi) \exp(j\xi t) d\xi \right\} = [1 + m\zeta(t)] \exp(j\omega_0 t) \end{aligned}$$

Таким образом, амплитуда аналитического сигнала $1 + m\zeta(t)$ совпадает с модулирующим сигналом.

Аналитический сигнал позволяет получить значение мгновенной фазы сигналов с угловой (фазовой) модуляцией. ФМ сигнал может быть записан в виде $x(t) = A_0 \cos(\omega t + \phi(t))$, где $\phi(t) = m\zeta(t)$, m - коэффициент угловой модуляции, $\zeta(t)$ - модулирующий сигнал ($|\zeta(t)| < 1$). Известно, что при малых коэффициентах модуляции (это означает, что спектр модулированных колебаний “прижат” к частоте несущей ω), мгновенная фаза сигнала $x(t)$ может быть получена в виде аргумента комплексного аналитического сигнала:

$$\omega t + \phi(t) \simeq \arctan \left(\frac{\operatorname{Im}[X(t)]}{\operatorname{Re}[X(t)]} \right)$$

Данное свойство позволяет использовать ПГ в качестве фазового детектора.

4.1.4 Дискретное преобразование Гильберта

Дискретное преобразование Гильберта (ДПГ) вводится по аналогии с обычным (аналоговым) преобразованием Гильберта. Оно определяется как линейное преобразование дискретного сигнала $x(n)$, частотная характеристика которого совпадает с частотной характеристикой ПГ:

$$K(\bar{\omega}) = \begin{cases} -j & \text{если } \bar{\omega} \in [0; \pi] \\ j & \text{если } \bar{\omega} \in [-\pi; 0] \end{cases}$$

Таким образом, ДПГ можно рассматривать как цифровой фильтр, АЧХ которого постоянна во всей полосе частот, а ФЧХ - кусочно-постоянна. Такой фильтр будет некаузальным. Это легко увидеть, если рассчитать импульсную характеристику ДПГ:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 j \exp(j\bar{\omega}n) d\bar{\omega} - \int_0^{\pi} j \exp(j\bar{\omega}n) d\bar{\omega} \right] = \begin{cases} \frac{2 \sin^2(\pi n/2)}{\pi n}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Видно, что импульсная характеристика отлична от нуля для сколь угодно малых значений n , а значит преобразование некаузально и не может быть реализовано техническими средствами. Тем не менее, также как и в случае обычных фильтров - мы

не можем реализовать идеальный фильтр, но можно построить фильтр, сколь угодно близкий к идеальному. При определенных условиях, накладываемых на преобразуемые сигналы, можно построить цифровой фильтр Гильберта, приближающийся по своим свойствам к ДППГ.

4.1.5 Цифровой фильтр Гильберта с линейной ФЧХ

Подойдем к задаче создания фильтра Гильберта также как к задаче синтеза обычного фильтра. При решении этой задачи учтем, что любой цифровой фильтр имеет некоторую групповую задержку k . Это означает, что сигнал на выходе фильтра в текущий момент времени $y(n)$ будет соответствовать сигналу, сопряженному со входным сигналом, рассматриваемым k шагов назад: $y(n) \simeq \tilde{x}(n-k)$. В соответствии с этим, ФЧХ фильтра Гильберта будет представлять собой линейную функцию от частоты, и равную $-\pi/2$ в нуле. АЧХ фильтра Гильберта должно быть постоянным и равным единице.

В работе N3, в разделе 3.1.8 рассматривались общие принципы синтеза фильтров с линейной ФЧХ. В частности, было показано, что такими свойствами могут обладать КИХ фильтры $y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i)$ с нечетным числом слагаемых $M = 2k$. Частотная характеристика таких фильтров (см.3.15) имеет вид:

$$K(\bar{\omega}) = [\{b_0 \exp(jk\bar{\omega}) + b_{2k} \exp(-jk\bar{\omega})\} + \{b_1 \exp(j(k-1)\bar{\omega}) + b_{2k-1} \exp(-j(k-1)\bar{\omega})\} + \dots + \{b_{k-1} \exp(j\bar{\omega}) + b_{k+1} \exp(-j\bar{\omega})\} + b_k] \exp(-jk\bar{\omega}) \quad (4.5)$$

Запишем ее в виде $K(\bar{\omega}) = -j \exp(-jk\bar{\omega}) D(\bar{\omega})$. Чтобы синтезировать фильтр Гильберта нам надо так подобрать коэффициенты b_i , чтобы функция $D(\bar{\omega})$:

- была вещественной и
- принимала значения, близкие к единице во всем частотном диапазоне.

Из формулы (4.5) видно, что для вещественного характера $D(\bar{\omega})$ достаточно выбрать коэффициенты b_i антисимметричным образом:

$$\begin{aligned} b_0 &= -b_{2k} \\ b_1 &= -b_{2k-1} \\ &\dots \\ b_{k-1} &= b_{k+1} \\ b_k &= 0 \end{aligned}$$

В этом случае, получаем:

$$D(\bar{\omega}) = -2 \{b_0 \sin(k\bar{\omega}) + b_1 \sin((k-1)\bar{\omega}) + \dots + b_{k-1} \sin(\bar{\omega})\} \quad (4.6)$$

Посмотрим, какими свойствами будет обладать фильтр с данным выбором коэффициентов. Из (4.6) следует, что, как при $\bar{\omega} = 0$, так и при $\bar{\omega} = \pi$ коэффициент передачи фильтра будет равен нулю ($K(\bar{\omega}) = 0$). Таким образом, указанный фильтр

может быть лишь полосовым. Отсюда мы приходим к важному выводу: ЦФГ может работать с сигналами, имеющими полосовой спектр (то есть спектр которых находится в некоторой полосе частот от ω_1 до ω_2). Наличие верхней граничной частоты не имеет принципиального значения, поскольку любые методы цифровой обработки требуют ограниченности спектра сверху. Наличие нижней граничной частоты выделяет ДПГ среди других методов обработки: оно не может применяться к тем сигналам, в спектре которых присутствуют гармоники на сколь угодно низких частотах.

Таким образом, асимметричный выбор коэффициентов обеспечивает нам нужные фазо-частотные свойства фильтра Гильберта. Чтобы обеспечить нужные амплитудно-частотные свойства, необходимо подобрать соответствующие коэффициенты b_i . Как это сделать? Простейший (но не лучший) способ - воспользоваться импульсной характеристикой (4.4). Если мы учтем групповую задержку фильтра на k шагов, то она преобразуется к виду:

$$h(n) = \begin{cases} \frac{2 \sin^2(\pi(n-k)/2)}{\pi(n-k)}, & n \neq k \\ 0, & n = k \end{cases}$$

оставаясь некаузальной. Чтобы обеспечить каузальность, можно “отсечь” все слагаемые с $n < 0$ и соответственно с $n > 2k$. Поскольку $h(n)$ спадает пропорционально $1/(n-k)$ от своего максимального значения, то выбирая большое k (соответственно большой порядок фильтра) можно сделать “обрезаемые” слагаемые сколь угодно малыми. Однако, такой путь не дает возможность создать хороший фильтр Гильберта. Данный метод “упирается” в хорошо известное в радиофизике явление Гиббса. Отсечение малых слагаемых в импульсной характеристике не позволяет сколь угодно близко приблизить соответствующую частотную характеристику к частотной характеристике идеального фильтра, поскольку на ней появляются “осцилляции” значительной амплитуды. Поэтому на практике используется синтез *фильтров Чебышева*, характеристика которых, при выбранном порядке фильтра, лучше всего совпадает с характеристикой идеального фильтра. Одним из алгоритмов подбора коэффициентов фильтров Чебышева является *алгоритм Ремеза*. Синтез фильтра Гильберта выходит за рамки данной работы, поэтому данный алгоритм рассматриваться здесь не будет.

4.2 Практическая часть

В лабораторной работе определяются характеристики цифрового фильтра Гильберта (АЧХ, ФЧХ, импульсная характеристика), исследуются сигналы через ЦФГ, проводится анализ возможности использования ЦФГ для амплитудного и фазового детектирования.

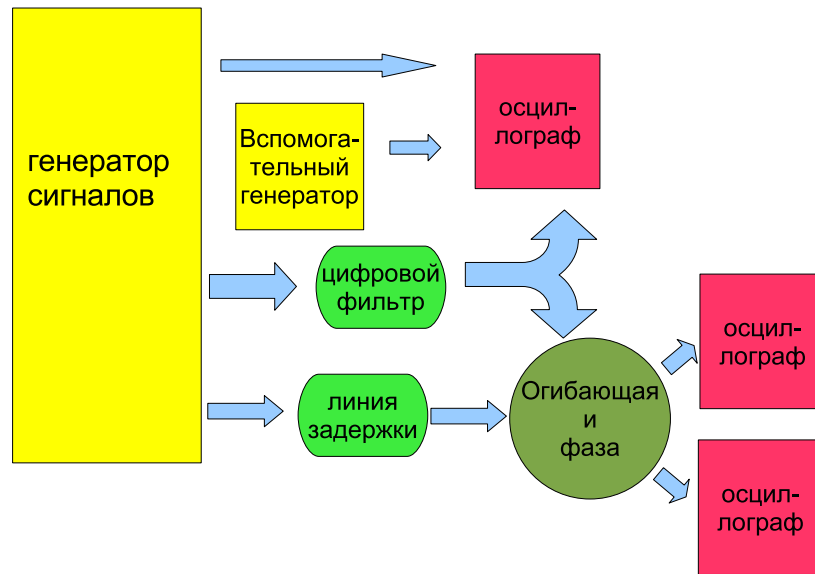


Рис. 4.1: Функциональная схема установки для исследования цифрового фильтра Гильберта

4.2.1 Экспериментальная установка

Экспериментальная установка представляет собой компьютерную программу, созданную в среде программирования LabView, которая позволяет моделировать регулярные дискретные сигналы, проводить их фильтрацию при помощи цифрового фильтра Гильберта, отображать сами сигналы на осциллографе. Кроме того, используя исходный и преобразованный (сопряженный) сигналы, программа строит (и отображает на осциллографе) временные зависимости мгновенной амплитуды $A(n) = \sqrt{x^2(n) + \tilde{x}^2(n)}$, и приведенной мгновенной фазы $\psi(n) = \arctan(\tilde{x}(n)/x(n)) - \omega_0 n$. Функциональная схема изображена на рис. 4.1

В установку входят:

1. генератор, позволяющий генерировать следующие виды сигналов с дискретным временем:

- гармонический сигнал единичной амплитуды и заданной частоты ω_0 : $x(n) = \cos(\omega_0 n)$;
- периодическая последовательность прямоугольных импульсов скважностью два с единичной амплитудой и заданной базовой частотой ω_0 : $x(n) = \text{Sign}[\cos(\omega_0 n)]$ ($\text{Sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ - функция знака);
- гармонический сигнал единичной амплитуды и заданной частоты ω_0 , промодулированный по амплитуде и/или по фазе другим гармоническим сигналом, с заданной частотой Ω и коэффициентом модуляции m :

$x(n) = [1 + S_{AM}m \cos(\Omega n)] \cos(\omega_0 n + S_{PM}m \cos(\Omega n))$, здесь $S_{AM, PM}$ - коэффициенты, принимающие значение 1 при включении соответствующего типа модуляции и 0 - при выключении данного типа модуляции;

- периодическая последовательность прямоугольных импульсов скважностью два с единичной амплитудой и заданной базовой частотой ω_0 , промодулированная по амплитуде и/или по фазе гармоническим сигналом, с заданной частотой Ω и коэффициентом модуляции m :
 $x(n) = [1 + S_{AM}m \cos(\Omega n)] \text{Sign}[\cos(\omega_0 n + S_{PM}m \cos(\Omega n))]$, здесь $S_{AM, PM}$ - коэффициенты, принимающие значение 1 при включении соответствующего типа модуляции и 0 - при выключении данного типа модуляции;
- сигнал единичного импульса $x(n) = \delta(n)$.

2. Вспомогательный генератор гармонических колебаний с задаваемой амплитудой a и начальной фазой φ_0 , частота которого привязана к частоте основного генератора: $x_1(n) = a \cos(\omega_0 n + \varphi_0)$. Вспомогательный генератор служит для построения АЧХ и ФЧХ фильтра.
3. Цифровой фильтр Гильберта.
4. Линия задержки, задерживающая исходный сигнал на заданное число шагов N : $y(n) = x(n - N)$.
5. Детектор мгновенной амплитуды и мгновенной фазы, определяющий амплитуду и фазу в соответствии с формулами: $A(n) = \sqrt{y^2(n) + \tilde{x}^2(n)}$ и $\psi(n) = \arctan(\tilde{x}(n)/y(n)) - \omega_0 n$.
6. Три осциллографа для отображения формы сигналов, формы мгновенной амплитуды и формы мгновенной фазы.

На рис.4.2 приведена передняя панель установки. На ней располагаются:

1. **Основной генератор (Main Generator)** - генератор, который формирует указанные выше формы сигналов. Он содержит следующие элементы управления:
 - a) **Signal choice** – переключатель формы выходного сигнала. Нажатием на кнопку форма сигнала изменяется в последовательности импульс – синус – прямоугольник .
 - b) **Frequency** – регулятор нормированной частоты в пределах выбранного диапазона от 0–0.5. При вращении ручки по часовой стрелке происходит увеличение частоты, против часовой стрелки – уменьшение.
 - c) **Number of samples** – регулятор длительности сигнала (задает число отсчетов сигнала).
2. **Модулятор (Modulator)** - генерирует модулирующий сигнал. .

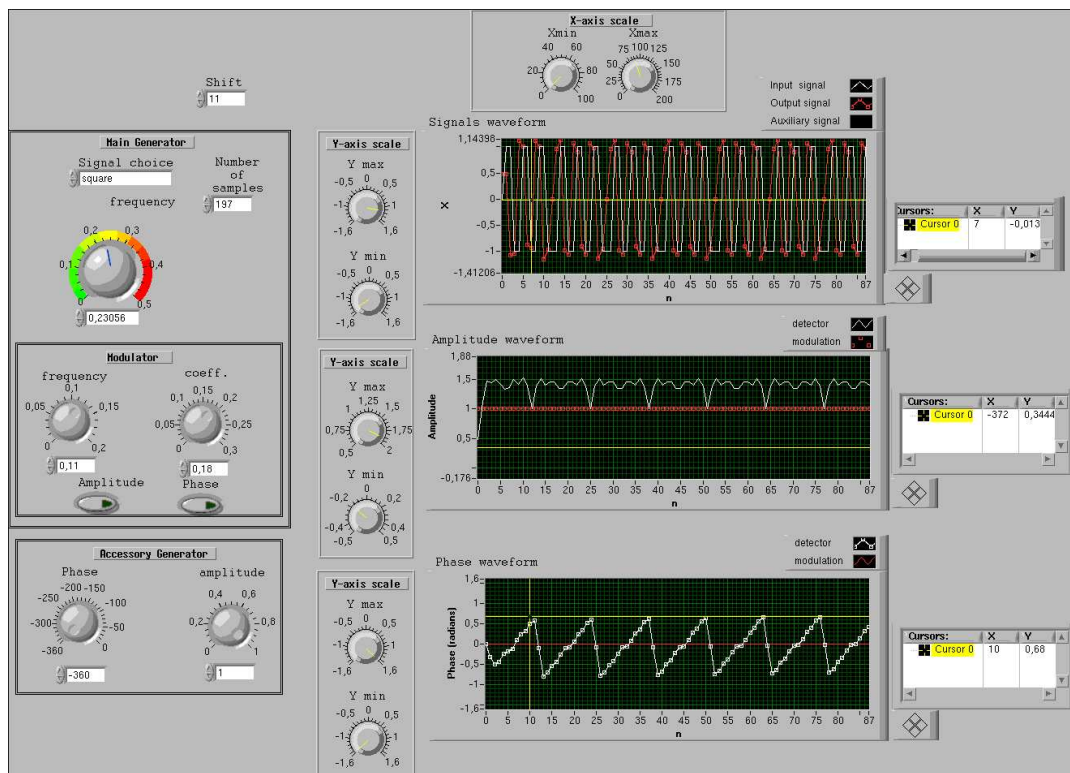


Рис. 4.2: Вид передней панели установки для исследования цифрового фильтра Гильберта

- а) Ручка **Frequency** – регулятор нормированной частоты модулирующего сигнала Ω в пределах выбранного диапазона от 0 – 0.5.
 - б) Ручка **Mod. coeff** - задает коэффициент модуляции m .
 - с) Кнопки **Amplitude** и **Phase** – включают/выключают соответствующий тип модуляции (АМ и ФМ) .
3. **Вспомогательный генератор (Accessory generator)** - генерирует вспомогательный гармонический сигнал.
- а) Ручка **Phase** - задает начальную фазу сигнала.
 - б) Ручка **Amplitude** - задает амплитуду сигнала.
4. **Осциллограф 1** строит исходный сигнал, сопряженный сигнал, сигнал вспомогательного генератора.
5. **Осциллограф 2** строит форму мгновенной амплитуды
6. **Осциллограф 3** строит форму мгновенной фазы. Все три осциллографа снабжены ручками регулировки масштабов по вертикали, блок курсоров, имеют единый регулятор масштаба по горизонтали.

4.2.2 Ход работы

1. Определение характеристик фильтра Гильберта.
 - а) Постройте импульсную характеристику ЦФГ. Для этого подайте на вход фильтра сигнал в виде одиночного δ -импульса (длительность сигнала должна быть достаточно большой). Выходной сигнал будет представлять собой импульсную характеристику. Определите максимальный интервал времени, на котором импульсная характеристика остается ненулевой. Определите групповую задержку фильтра.
 - б) Постройте АЧХ ЦФГ. Подайте на вход фильтра гармонический сигнал. Меняя частоту входного сигнала, измеряйте амплитуду выходного сигнала. Зависимость данной амплитуды от частоты и будет представлять собой искомую АЧХ (поскольку амплитуда входного сигнала равна единице). Для более точного определения амплитуды выходного сигнала используйте вспомогательный генератор: ручкой регулировки амплитуды подберите амплитуду сигнала вспомогательного генератора равной амплитуде выходного сигнала, тогда показание дисплея ручки регулировки амплитуды и будут представлять собой искомую амплитуду сопряженного сигнала.

- с) Постройте ФЧХ ЦФГ. Подайте на вход фильтра гармонический сигнал. Меняя частоту входного сигнала, измеряйте начальную фазу выходного сигнала по отношению к фазе входного. Зависимость начальной фазы от частоты и будет представлять собой искомую ФЧХ (поскольку начальная фаза входного сигнала равна нулю). Для более точного определения начальной фазы выходного сигнала используйте вспомогательный генератор: ручкой регулировки фазы установите начальную фазу сигнала вспомогательного генератора равной фазе выходного сигнала, тогда показание дисплея ручки регулировки фазы и будут представлять собой искомую фазу сопряженного сигнала.
- д) По найденной импульсной характеристике постройте теоретическую зависимость АЧХ и сопоставьте ее с экспериментальной.

2. Исследование прохождения сигналов через фильтр Гильберта

- а) Предварительно установите время задержки входного сигнала равное групповой задержке ЦФГ. После этого сигнал на выходе фильтра будет представлять собой сопряженный сигнал.
- б) Проведите исследование прохождения гармонического сигнала через ЦФГ. Убедитесь, что сдвиг фазы между исходным и преобразованным сигналами составляет 90 градусов. Проиллюстрируйте это несколькими осциллограммами. Определите сдвиг фазы между сигналами для нескольких значений частоты в полосе подавления фильтра.
- с) Проведите исследование прохождения последовательности прямоугольных импульсов через ЦФГ. Постройте несколько характерных осциллограмм.

3. Исследование детектирующих свойств фильтра Гильберта.

- а) Проведите исследование детектирующих свойств ЦФГ для АМ сигнала. Подайте на фильтр АМ сигнал с разными частотами огибающей и разными коэффициентами модуляции. Постройте график зависимости $\Delta_{AM}(\omega)$, $\Delta_{AM}(\Omega)$, $\Delta_{AM}(m)$, здесь $\Delta_{AM} = \|A_H(n) - A(n)\| / \|A(n)\|$ - относительная погрешность детектора ($A_H(n)$ - мгновенная амплитуда, определяемая при помощи ЦФГ, $A(n)$ - мгновенная амплитуда (огибающая). Обе величины $A_H(n)$ и $A(n)$ определяются при помощи курсорных измерений на экране осциллографа 2, $\| \cdot \|$ - означает равномерную норму). Постройте несколько характерных осциллограмм для мгновенных амплитуд
- б) Проведите исследование детектирующих свойств ЦФГ для ФМ сигнала. Подайте на фильтр ФМ сигнал с разными частотами огибающей и разными коэффициентами модуляции. Постройте график зависимости $\Delta_{PM}(\omega)$, $\Delta_{PM}(\Omega)$, $\Delta_{PM}(m)$, здесь $\Delta_{PM} = \|\psi_H(n) - \psi(n)\| / \|\psi(n)\|$ - относительная

погрешность детектора ($\psi_H(n)$) - мгновенная фаза, определяемая при помощи ЦФГ, $\psi(n)$ - мгновенная амплитуда (огибающая). Обе величины $\psi_H(n)$ и $\psi(n)$ определяются при помощи курсорных измерений на экране осциллографа 3, $\|\cdot\|$ - означает равномерную норму). Постройте несколько характерных осциллограмм для мгновенных фаз.

- с) Проведите исследование детектирующих свойств для АМ или ФМ сигнала, в том случае, когда несущей является сигнал, представляющий собой последовательность прямоугольных импульсов. Проиллюстрируйте детектирующие свойства несколькими рисунками.